第六章 磁异常的处理与转换

第一节 概述

磁异常的转换处理是磁法勘探解释理论的一个重要组成部分，目前磁异常的转换处理主要有圆滑、划分异常（如区域场和局部场的分离，深源场与浅源场的分离等）、磁异常的空间转换（由实测异常换算其他无源空间部分的磁场，也称解析延拓）；分量换算（由实测异常进行 $\Delta T, Hax, Hay$ 之间的分量换算）、导数换算（由实测异常计算垂向导数、水平方向导数等）、不同磁化方向之间的换算（如化到地磁极等）以及曲面上磁异常转换等等。

磁异常转换处理的方法包括空间域和频率域两类。频率域方法由于速度快，方法简单等优点，已成为磁异常转换处理的主要方法。

早在 20 世纪 50 年代，诸如导数异常的计算，磁场解析延拓，化到地磁极等方法已相继提出。但是，一直到 20 世纪 60、70 年代以后，由于电子计算机的广泛应用，磁异常的转换处理才变得容易实现，其理论和方法得到了迅速的发展，并不断得到完善。

在正反演向题的讨论中，为了简单起见，对讨论的问题作了种种假设，如磁性体形状规则、磁化均匀、观测面水平等等，在这些假设条件下，我们建立了磁性体与磁异常特征之间的关系，从而建立起一套解释的理论。然而实际情况却往往与这些理论假设有很大偏差。这时我们仍用以上方法直接对实测异常进行解释就有可能导致不正确的结果。例如，一些近似等轴状的磁性体，当磁测剖面在磁性体上方较远处时，该磁性体可以看作一个磁性球体来处理。但当剖面很靠近磁性体时，这种假设就可能带来较大的误差。这时若能将此剖面通过数学处理换算出较高平面上的异常，则解释结果可能得到改善。我们把实测磁异常进行滤波，傅里叶变换等各种数学处理，增加推断解释的信息称为磁异常的处理转换。

磁异常处理转换的目的有：

（1）使实际异常满足或接近解释理论所要求的假设条作。例如把分布在曲面上的实测异常换算成分布在同一平面上的异常；把叠加异常分解为孤立异常，或把似二度异常转换为二度异常等。即把复杂异常处理成简单异常，以便于解释。

（2）使实际异常满足解释方法的要求。例如由磁场某单分量测量结果换算其它分量的值；或者由磁场值转换成为频谱值等。从而可以提供多方面的异常信息来满足一些解释方法本身的要求。

（3）突出磁异常某一方面的特点。例如通过向上延拓等方法来压制浅部磁性体的异常，相对突出深部磁性体的异常；通过滤波或换算方向导数来相对突出某一走向方向的磁异常特征等。

应当指出，在对磁异常进行处理和转换时，有两个问题必须明确。一是应当合理地选择处理转换的方法。目前处理转换的方法很多，各种方法有各自的特点和作用，同时又有各自特定的适用条件，不应当盲目地对各种方法都使用一遍。而应当分析磁异常特征，测区内地质、物性情况及所要解决的地质问题，根据各种处理方法的功能和适用条件来合理地选择处理方法。使用者必须掌握各种处理转换方法的原理和应用条件。二是磁异常的处理转换只是一种数学加工处理，它能使资料中某些信息更加突出和明显，如提高异常的信噪比，但不能获得在观测数据中不包含的信息。

第二节 圆滑、插值与数据网格化

一、磁异常的最小二乘圆滑

野外实测异常中总包含有测量的偶然误差和近地表不均匀磁性体产生的干扰，使实测磁场表现出不规则的起伏。在对异常进行处理时往往要先进行圆滑，以消除这些干扰，突出主体异常。

对实测异常进行圆滑，常用的方法是函数拟合。

（一） 线性平滑

在磁异常剖面图上，若在一定范围内异常按照线性关系变化，则在这个范围内某一点经平滑后的异常值可用线性方程表示

$$\Delta T(x)=a_0+a_1x \tag{6-2-1}$$

式中的a_0和a_1为待定系数，可用最小二乘方法解出，若该点原始值为$\Delta T(x_i)$，它的平滑值为$\overline{\Delta T}(x_i)$,可由下面求得：

$$\delta=\sum_{i=-m}^{m}\left[a_0+a_1x_i-\Delta T(x_i)\right]^2=min \tag{6-2-2}$$

其中δ为偏差的平方和。利用微分求极值的方法将式(6-2-2)对a_0和a_1求导数，然后令其为零得

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial\delta}{\partial a_0}&=2\left[a_0+a_1x_i-\Delta T(x_i)\right]=0\\ \frac{\partial\delta}{\partial a_1}&=2\left[a_0+a_1x_i-\Delta T(x_i)\right]x_i=0\end{aligned}\right\} \tag{6-2-3}$$

若x_i以剖面上的点距为单位，即Δx=1,取点的方式如图(6-2-1)所示，则式(6-2-3)中的x_i=0，±1，±2……±m。当把它们代入式((6-2-3)中可解出a_0和a_1分别为

$$a_0=\frac{\sum_{i=-m}^{m}\Delta T(x_i)}{2m+1} \qquad a_1=\frac{\sum_{i=-m}^{m}x_i\Delta T(x_i)}{\sum_{i=-m}^{m}x_i^2}$$

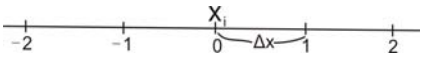


图 6-2-1　剖面平滑时取点方式示意图

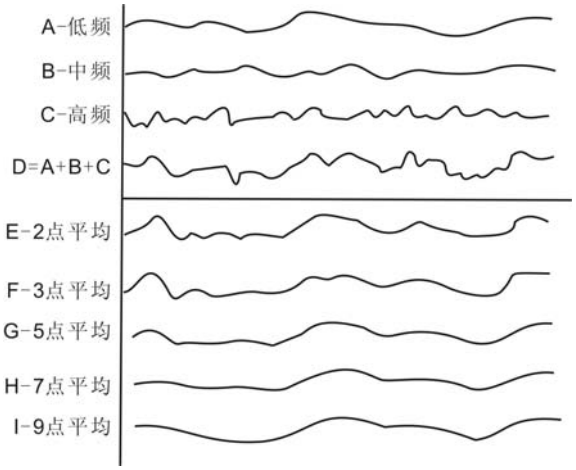


图 6-2-2 不同点数平滑效果的对比

由式(6-2-1)可知当 x=0 时，$\overline{\Delta T}(0)=a_0$，即

$$\overline{\Delta T}(0)=\frac{1}{2m+1}\sum_{i=-m}^{m}\Delta T(x_i) \qquad (6\text{-}2\text{-}4)$$

由此可见，按图 6-2-1 取数平滑某一点的值，实际上是在剖面上以该点为中心取奇数点的算术平均值。当 m=±1 时，得三点平滑公式为

$$\overline{\Delta T}=\frac{1}{3}\left[\Delta\, T(-1)+\Delta T(0)+\Delta T(1)\right] \qquad (6\text{-}2\text{-}5)$$

同理可得 5 点、7 点、9 点等平滑公式

在实际工作中究竟采用几点平均最合适，这需要根据平滑的目的而定。一般说参加平均的点越多，得出的曲线越光滑。图 6-2-2 就是线性平滑效果的例子。

在图 6-2-2 中，其中曲线 *D* 是表示由低、中和高频信息即 *A*、*B*、*C* 合成的，它的形态就包含了各种周期变化的成分。图中 *E*、*F*、*G*、*H*、*I* 分别表示取 2、3、5、7、9 个点作为平滑后的曲线。可见随着参加平均的点数增加，“高频”成分逐渐减弱，即短周期干扰逐渐消失。用 7 点平均时，*B*、*C* 两种异常基本被平滑掉了，只保留了原来的“低频”成分 *A* 了。在 9 点平滑后，同样保留了低频成分，只是更平滑了。

（二） 二次曲线平滑公式

若磁异常剖面曲线在一定范围内可视为二次曲线时，则在这个范围内，平滑公式可用下面的二次曲线方程来表示。即

$$\overline{\Delta T}(x_i)=a_0+a_1x_i+a_2x_i^2$$

同样可以使用最小二乘法求出上面方程中的系数。即

$$\delta=\sum\left[a_0+a_1x_i+a_2x_i^2-g(x_i)\right]^2=min \qquad (6\text{-}2\text{-}6)$$

应用导数求极值的方法，将式(6-2-6)分别对 a_0、a_1、a_2 求偏导数，并令其等于零，得

$$\frac{\partial\delta}{\partial a_0}=\sum_{i=-m}^{m}2\left[a_0+a_1x_i+a_2x_i^2-\Delta T(x_i)\right]=0$$

$$\frac{\partial\delta}{\partial a_1}=\sum_{i=-m}^{m}2\left[a_0+a_1x_i+a_2x_i^2-\Delta T(x_i)\right]x_i=0$$

$$\frac{\partial \delta}{\partial a_1}=\sum_{i=-m}^{m}2\left[a_0+a_1x_i+a_2x_i^2-\Delta T(x_i)\right]x_i^2=0$$

从而可由上述方程组解出 a_0。若取 m=2，可采用五点圆滑时，当数据是等间距，点距△x=1，选取被平滑的点在坐标原点时，即取 $x_i=0$，求得

$$\overline{\Delta T}(0)=a_0=\frac{1}{35}\left\{17\Delta T(0)+12\left[\Delta T(1)+\Delta T(-1)\right]-3\left[\Delta T(2)+\Delta T(-2)\right]\right\} \qquad (6\text{-}2\text{-}7)$$

同理可得七点二次平滑公式为

$$\overline{\Delta T}(0)=\frac{1}{21}\left\{7\Delta T(0)+6\left[\Delta T(1)+\Delta T(-1)\right]+3\left[\Delta T(2)+\Delta T(-2)\right]-2\left[\Delta T(3)+\Delta T(-3)\right]\right\} \qquad (6\text{-}2\text{-}8)$$

对于平面磁异常的圆滑，其方法与剖面一样，如剖面 5 点圆滑，平面则为 25 点圆滑等等，可以在相关的资料中找到圆滑系数。

二、磁异常的插值

野外施工常常采用点线距不等的测网，如$100\times40,500\times100$等，在资料处理解释时，有时需要将测线、测点加密，这就需要用插值方法。拉格朗日插值函数是比较简单的一种。拉格朗日插值函数的形式为

$$Z(x)=\sum_{m=0}^{n}Z(x_m)\frac{\prod_n(x)}{(x-x_m)\prod_n'(x_m)} \qquad (6\text{-}2\text{-}9)$$

式中$\prod_n(x)=(x-x_0)(x-x_1)\cdots\cdots(x-x_n)$；

$$\prod_n'(x_m)=\frac{\partial}{\partial x}\left[\prod_n(x)\right]_{x=x_m}$$

$$=(x_m-x_0)(x_m-x_1)\cdots\cdots(x_m-x_{m-1})(x_m-x_{m+1})\cdots\cdots(x_m-x_n);$$

x_m 为插值节点的坐标，共有 n+1 个插值节点；$Z(x_m)$为各插值节点上的磁场值；x 为计算点的坐标，Z(x)为该点的磁场值。例如 x_0，x_1，x_2 等三个点的异常值 $Z(x_0)$，$Z(x_1)$，$Z(x_2)$，可以构造一个拉格朗日插值函数

$$\overline{Z}(x)=\sum_{m=0}^{2}Z(x_m)\frac{\prod_2(x)}{(x-x_m)\prod_2'x_m}$$

于是可以计算插值点 x 处的异常值$\overline{Z}(x)$。

用拉格朗日插值时，节点不应选择过多，即插值多项式的阶次不宜过高。一般选 3 个插值节点。也可以采用三次样条插值函数。对于平面数据可以用二维拉格朗日插值多项式来进行插值。其形式为

$$\overline{Z}(x,y)=\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n}\prod_{\substack{l=0\\l\neq j}}^{m}\prod_{\substack{k=0\\k\neq i}}^{n}\left(\frac{x-x_k}{x_i-x_k}\right)\left(\frac{y-y_k}{y_j-y_k}\right)Z(x_i,y_i) \qquad (6\text{-}2\text{-}10)$$

也可以采用双三次样条函数进行插值。

三、数据网格化

目前地面高精度磁测施工常常采用自由网（或称离散网），测点分布不规则；在航空磁测中由于航空磁测定位精度的提高，测线往往按实际航迹来恢复，这时实际测点的分布也是不规则的。为了成图及对磁测资料作数据处理，要求将不规则网格上的数据换算成规则网格节点上的数据，这个过程就是数据网格化。

目前，离散数据网格化常常直接使用作图软件来完成，如 SURFER 软件。SURFER 软件中的网格化部分提供了距离反比法、最小曲率法、克吕金法（Kringing）等多种网格化方法。距离反比法是用加权平均技术，由 x，y，z 数据采用内插网格点，权重与到网格结点（或节点）的距离成反比。而克吕金法是用刚体力学技术计算数据点与产生的微小变化的非偏估算之间的自相关。在理论上，其计算精度是其他方法所不及的，而实际上，克吕金法的有效性依赖了变量参数的选择，即使这些参数推算有可能不十分精确，但是克吕金法仍比距离反比法精确。用 SURFER 软件作网格化时，要注意如下几个问题：

（一）网格化方法的选择

有些网格化方法作出来的异常图的局部细节保留得比较好，但这种方法当遇到数据误差较大、异常复杂时，做出来的结果就显得凌乱，如距离反比法；反之，有些方法则异常的总体形态比较规则，但是一些细节则表现不出来。目前用得最多的网格化方法是克吕金法。

（二）网格化半径的选择

太大的搜索半径会造成参与计算的点太多，异常太平滑，如果没有出现沿测线方向异常的畸变，则不要选择太大的搜索半径。

（三）搜索方向的选择

若出现沿测线方向异常的畸变，说明是线太稀，线上的点太密，参与计算的点大多集中在一条测线上。可以通过改变搜索方向来解决，增加垂直测线方向的相邻测点的数量与权重。

第三节 空间域磁异常的处理与转换

一、二度磁异常的解析延拓

（一）向上延拓

根据某观测平面上的实测磁异常，换算场源以外其它空间位置的磁异常称为磁异常的解析延拓。换算平面位于实测平面之上，就称为向上延拓。从位场理论来说，就是要求找出函数 u，它在上半空间是调和的，在无穷远处是正则的，并在边界 z=0 的平面上取已知值 u(x,0)，这是半空间狄里希莱问题，即

$$\begin{cases}\Delta u = 0 \\ u\big|_{x=0} = u(\mathrm{x},0)\end{cases} \qquad (Z<0) \qquad (6\text{-}3\text{-}1)$$

它的解为

$$u(\mathrm{x},\mathrm{z}) = -\frac{\mathrm{z}}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{u(\xi,0)}{(\xi-x)^2+z^2}d\xi \qquad (6\text{-}3\text{-}2)$$

这就是半平面的泊松积分。由于磁位 u 及其在各个方向的偏导数 Z_a，H_a，ΔT(一级近似值)都是调和函数，因此它们都满足式(6-3-2)。以 ΔT 为例，有

$$\Delta \mathrm{T}(\mathrm{x},\mathrm{z}) = -\frac{\mathrm{z}}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\Delta T(\xi,0)}{(\xi-x)^2+z^2}d\xi \tag{6-3-3}$$

式中 $\Delta T(\xi,0)$ 为剖面上各点的实测值。

若坐标原点位于计算点下方实测剖面上，延拓高度为一倍点距，设为 h。即(6-3-3)式中 x=0，z=-h。式则(6-3-3)成为

$$\Delta \mathrm{T}(0,-\mathrm{h}) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{h}}{\xi^2+h^2}\Delta T(\xi,0)d\xi \tag{6-3-4}$$

现在向上延拓的向题就成为如何计算上述积分的问题。采用不同的积分方法可以得出不同的向上延拓的方法。例如，可以按点距把上述积分区间划分为许多长度为 h 的小区间：

$\left(n-\frac{1}{2}\right)h \sim \left(n+\frac{1}{2}\right)h$，则式(6-3-4)可写成

$$\Delta \mathrm{T}(0,-\mathrm{h}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{\pi}\int_{(\mathrm{n}-\frac{1}{2})\mathrm{h}}^{(\mathrm{n}+\frac{1}{2})\mathrm{h}}\frac{\mathrm{h}}{\xi^2+h^2}\Delta T(\xi,0)d\xi \tag{6-3-5}$$

利用积分中值定理有

$$\begin{aligned}\Delta \mathrm{T}(0,-\mathrm{h}) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{\Delta T(\mathrm{nh},0)}{\pi}\int_{(\mathrm{n}-\frac{1}{2})\mathrm{h}}^{(\mathrm{n}+\frac{1}{2})\mathrm{h}}\frac{\mathrm{h}}{\xi^2+h^2}\Delta T(\xi,0)d\xi \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty}\Delta T(\mathrm{nh},0)\frac{1}{\pi}arctg\frac{4}{4n^2+3} \\ &= 0.2592\Delta T(0,0)+0.1652\left[\Delta T(\mathrm{h},0)+\Delta T(\text{-h},0)\right] \\ &\quad +0.0660\left[\Delta T(2\mathrm{h},0)+\Delta T(\text{-2h},0)\right]+0.0325\left[\Delta T(3\mathrm{h},0)\right. \\ &\quad \left.+\Delta T(\text{-3h},0)\right]+\cdots\cdots\end{aligned} \tag{6-3-6}$$

如果延拓高度为二倍点距，即 z=-2h，则用上述相同的方法可得出

$$\begin{aligned}\Delta T(0,-2\mathrm{h}) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty}\Delta T(\mathrm{nh},0)\frac{1}{\pi}arctg\frac{8}{4n^2+15} \\ &= 0.1560\Delta T(0,0)+0.1269\left[\Delta T(\mathrm{h},0)+\Delta T(\text{-h},0)\right] \\ &\quad +0.0804\left[\Delta T(2\mathrm{h},0)+\Delta T(\text{-2h},0)\right]+0.0495\left[\Delta T(3\mathrm{h},0)\right. \\ &\quad \left.+\Delta T(\text{-3h},0)\right]+\cdots\cdots\end{aligned} \tag{6-3-7}$$

可见向上延拓公式的一般形式为

$$\Delta T(0,\text{-mh}) = \mathrm{C}_0\Delta T(0,0)+\sum_{\mathrm{n}=1}^{\infty}\mathrm{C}_\mathrm{n}\left[\Delta T(\mathrm{nh},0)+\Delta T(\text{-nh},0)\right] \tag{6-3-8}$$

向上延拓高度为 h，2h，3h，4h 时的系数如表(6-3-1)所示。

表 6-3-1　二度异常向上延拓系数表

延拓高度 / 延拓系数	-h	-2h	-3h	-4h
C_0	0.2592	0.1560	0.1051	0.0792
C_1	0.1652	0.1269	0.0950	0.0746
C_2	0.0660	0.0804	0.0736	0.0636
C_3	0.0325	0.0495	0.0533	0.0510
C_4	0.0190	0.0321	0.0384	0.0399
C_5	0.0124	0.0221	0.0282	0.0311
C_6	0.0087	0.0160	0.0213	0.0246
C_7	0.0064	0.0121	0.0165	0.0196
C_8	0.0049	0.0094	0.0131	0.0159
C_9	0.0039	0.0075	0.0106	0.0132
C_{10}	0.0032	0.0061	0.0088	0.0110
C_{11}		0.0051	0.0074	0.0093
C_{12}		0.0043	0.0063	0.0080
C_{13}			0.0054	0.0069
C_{14}			0.0047	0.0060
C_{15}				0.0053
C_{16}				0.0047

磁异常的向上延拓从式(6-3-4)来看是精确的。但为计算上部空间一个点的场值需要积分区间无限大，这是不实际的。实际计算时总是用有限项的和来近似这无限积分。因此向上延拓换算的准确度主要决定于参与计算的剖面长度。剖面越长、点数越多，计算精度越高。但从而造成剖面边缘的损失也越大。延拓的高度越高，为保证必要的准确性，就要求参与计算的点数也越多，因而带来的边缘损失也越大。

另外根据式(6-3-4)或式(6-3-5)、式(6-3-6)可以证明，上延系数之和为 1。

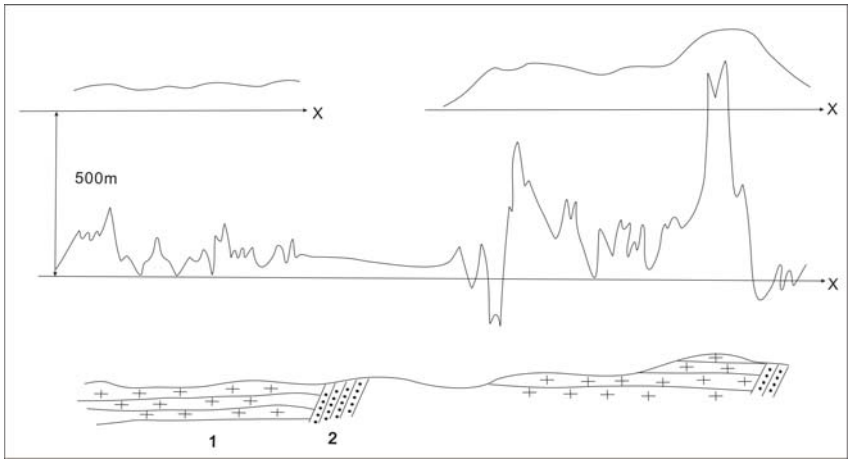


图 6-3-1 用向上延拓压制浅部玄武岩异常的影响

1．玄武岩；2．沉积岩

向上延拓是一种常用的处理方法，它的主要用途是削弱局部干扰异常，反映深部异常。我们知道，磁场随距离的衰减速度与磁性的地质体体积有关。体积大，磁场衰减慢；体积小，磁场衰减快。对于同样大小的地质体，磁场随距离衰减的速度与地质体埋深有关。埋深大，磁场衰减慢；埋深小，磁场衰减快。因此小而浅的地质体磁场比大而深的地质体磁场随距离衰减要快得多。这样就可以通过向上延拓来压制局部异常的干扰，反映出深部大的地质体。

图 6-3-1 是内蒙某地用磁法勘探普查超基性岩的实例。该地区浅部盖有一层不厚的玄武岩，使磁场表现为强烈的跳动。为压制玄武岩的干扰，将磁场向上延拓了 500m。由图可知，向上延拓的磁场压制了玄武岩的干扰。同时右侧部分反映了深部的超基性岩磁场。图 6-3-2 用向上延拓压制了浅部矿体的异常，突出了深部盲矿体产生的低缓异常。

通过向上延拓来研究深部磁性基底构造也是其应用的一个重要方面。

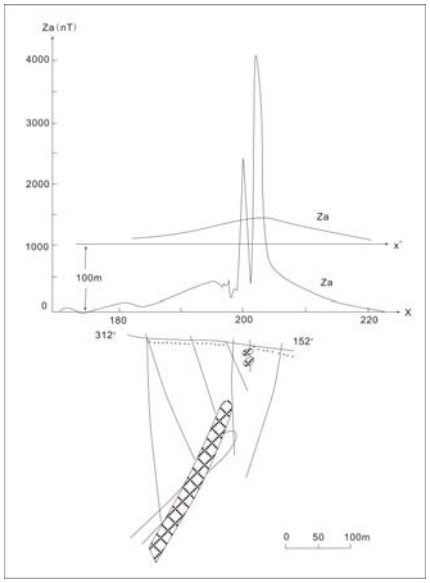


图 6-3-2 用向上延拓压制浅部矿体的异常

（二）向下延拓

向下延拓是由实测磁场向磁源方向延拓。从数学上知道，这时若边界值 $\Delta T(x,0)$有极微小的变化时，所得的解可以变化很大，即解是不稳定的，这类问题数学上称不适定问题。野外实测数据总是有一定误差，这些误差就会在解中放大为很大的数，以致把真实的解掩盖掉。因此按这种定义来进行向下延拓是很困难的。目前在空间域进行向下延拓使用的是近似方法。如多项式插值、级数正则化、调和分析等。本节利用复数的拉格朗日插值多项式来推导二度向下延拓公式。

复数插值多项式是在复平面内建立的。复平面内任一点的复坐标以 z=x+**i**y 表示。场强也是复场强。根据复变函数理论，我们可以假设一个与$\triangle T$ 正交的调和函数$\triangle T^{*}(x, y)$。则复场强可以表示为 $\overline{T}(z) = \Delta T^{*}(x, y) - i\Delta T(x, y)$。

复数形式的拉格朗日插值多项式为

$$\overline{T}(z) = \sum_{m=0}^{n} \overline{T}(z_m) \frac{\prod_n(z)}{(z - z_m)\prod_n' z_m} \tag{6-3-9}$$

利用此式只要在复平面的上半空间选择适当的节点 Z_0，Z_1,……Z_m，用这些点上的复场强就可以导出下部空间某一点 z 处的磁场表达式。例如，选 n=7，在上半空间取 Z_0=0，Z_1=-ih，Z_2=-h，Z_3=h，Z_4=-2h，Z_5=2h，Z_6=-3h，Z_7=3h。下延的计算点设为 z=ih(如图 6-3-3 所示)。

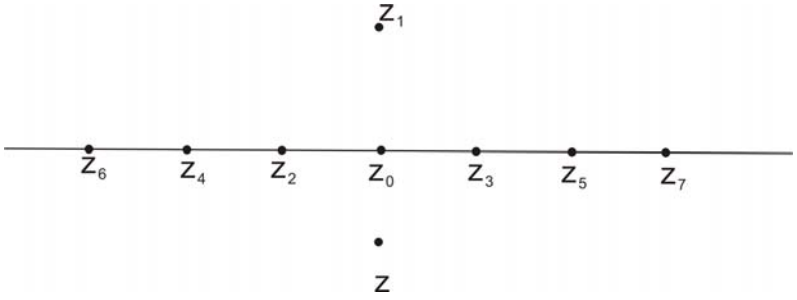


图 6-3-3 插值点与计算点位置示意图

将这些值及相应点位上的复场强值代入(6-3-8)式即可得到

$$\bar{T}(\mathrm{ih}) = \frac{50}{9}\bar{T}(0) - \bar{T}(-\mathrm{ih}) - \frac{25}{12}\left[\bar{T}(\mathrm{h}) + \bar{T}(-\mathrm{h})\right] + \frac{1}{3}\left[\bar{T}(2\mathrm{h}) + \bar{T}(-2\mathrm{h})\right] - \frac{1}{36}\left[\bar{T}(3\mathrm{h}) + \bar{T}(-3\mathrm{h})\right] + \cdots\cdots$$

取其虚部，并用式(6-3-6)代入 $\Delta T(0,-\mathrm{h})$，即得

$$\begin{aligned}\Delta T(0,\mathrm{h}) &= 5.2604\Delta T(0,0) - 2.2486[\Delta T(\mathrm{h},0) + \Delta T(-\mathrm{h},0)] \\ &+ 0.2673[\Delta T(2\mathrm{h},0) + \Delta T(-2\mathrm{h},0)] - 0.0603[\Delta T(3\mathrm{h},0) + \Delta T(-3\mathrm{h},0)] \\ &- 0.0190[\Delta T(4\mathrm{h},0) + \Delta T(-4\mathrm{h},0)] - \cdots\cdots\end{aligned} \tag{6-3-10}$$

同样可以得到向下延拓深度为 2h，3h，4h 时的系数，如表 6-3-2

表 6-3-2　二度向下延拓系数表

延拓高度 / 延拓系数	-h	-2h	-3h	-4h
C_0	5.2604	28.7329	129.8949	472.1431
C_1	-2.2486	-17.4602	-87.8450	-333.4060
C_2	0.2673	4.2529	26.9264	113.2697
C_3	-0.0603	-0.4940	-3.3033	-15.1621
C_4	-0.0190	-0.0321	-0.0384	-0.0399
C_5	-0.0124	-0.0221	-0.0282	-0.0311
C_6	-0.0087	-0.0160	-0.0213	-0.0246

与向上延拓相反，向下延拓时随着延拓深度的加大，一些浅的局部干扰或误差也迅速增大，使延拓曲线发生剧烈跳动，甚至出现振荡而无法利用。为了克服这种影响，往往将圆滑和延拓配合使用，在向下延拓之前要对异常进行圆滑。

利用向下延拓可以分离水平叠加异常。我们知道，磁性体埋深越大，异常显得越宽缓。剖面越接近磁性体，磁异常的范围越接近磁性体边界。例如对两个相邻的板状体而言，当它接近地表时，实测磁异常可能明显地显示两个峰值。但当埋深大于两个板体的距离时，则其叠加异常将显示为两个宽而平的异常。因此将叠加的磁异常向下延拓到接近磁性体界面时就可能把各个磁性体的异常分离开来，增强分辨能力（见图 6-3-4）。

利用向下延拓还可以评价低缓异常，低缓异常是指强度和梯度都比较小的异常，显然这是磁性体埋藏较深的标志。低缓异常的某些异常特征是不明显的，用它来进行解释推断有一定困难。解决这一困难的办法就是向下延拓。向下延拓一方面可以突出叠加在区域背景上的局部异常，使之尽量少受区域场的影响；另一方面可以“放大”某些在低缓异常中不够明显的异常特征（如拐点、极值点、零值点等），有利于进一步解释推断。

此外，利用延拓到不同高度上的异常数据可以估算磁性体形状参数，判断磁性体形态；了解场源以上场的空间分布等，以增加推断解释的信息。

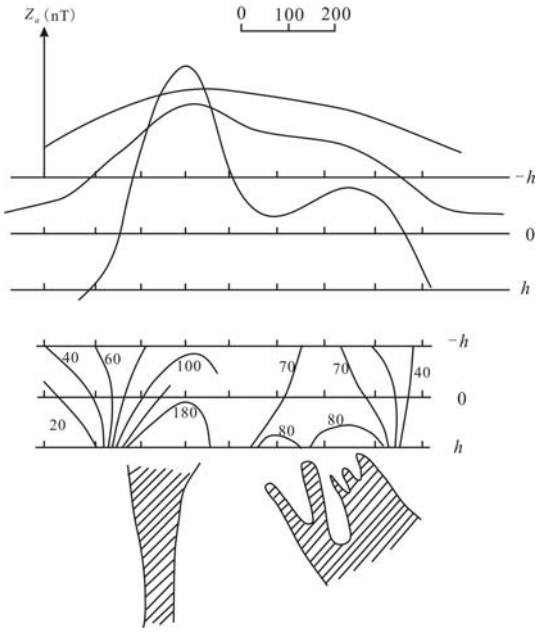


图 6-3-4 向下延拓分离水平叠加异常

二、磁异常的导数计算

磁异常导数是一种高通滤波，它是压制区域场，圈定局部场，分离叠加异常的常用方法，广泛用于磁异常的解释。从导数异常的物理意义就很容易看到它的这些特点。

当Δx，Δz很小时，磁异常的一阶导数可近似写成如下的差分形式：

$$\frac{\partial \Delta T}{\partial x}=\frac{\Delta T(\mathrm{x}+\Delta \mathrm{x})-\Delta T(\mathrm{x})}{\Delta \mathrm{x}}$$
$$\frac{\partial \Delta T}{\partial z}=\frac{\Delta T(\mathrm{z}+\Delta \mathrm{z})-\Delta T(\mathrm{z})}{\Delta \mathrm{z}} \tag{6-3-11}$$

由于Δx和Δz是常数，因此$\frac{\partial \Delta T}{\partial x}$和$\frac{\partial \Delta T}{\partial z}$曲线的形态与$\Delta T(\mathrm{x}+\Delta \mathrm{x})-\Delta T(\mathrm{x})$和$\Delta T(\mathrm{z}+\Delta \mathrm{z})-\Delta T(\mathrm{z})$的形态是一样的。而后者的物理意义由图 6-3-5 可以说明。由图可知，$\frac{\partial \Delta T}{\partial x}$曲线相当于垂直磁化的直立厚板状体两旁，厚度为Δx的两个薄板所产生的磁场：水平位置为$(\mathrm{x}+\Delta \mathrm{x})$厚板与水平位置为x的厚板相减，得到右侧磁化方向向上的薄板与左侧磁化方向向下的薄板。水平一阶导数即这两个磁化方向相反的薄板产生的磁异常，其极值点对应厚板状体的边界位置。而$\frac{\partial \Delta T}{\partial z}$曲线则相当于将一个薄板异常变成上下两个水平柱体的异常。根据这一分析不难理解对一个厚板状磁性体而言，$\frac{\partial^2 \Delta T}{\partial x \partial z}$曲线就相当于分布于厚板角点上的水平柱体的异常(如图 6-3-5c)。由此可见导数异常将大大减少相邻磁性体异常之间的干扰，有利于分离叠加异常。另外由于区域场一般表现为比较平缓的磁场特征，因而区域场的导数异常将会很小。由于导数异常的这些优点，因此在有条件的情况下，可以开展磁场梯度测量，即直接用磁力梯度仪观测磁异常的水平导数或垂向导数，以补充信息，提高解释效果。而目前多数情况下还是利用实测磁场各分量夹计算其导数异常。而且这已成为磁异常处理的常用方法之一。

由式(6-3-10)可知，为计算 $\frac{\partial \Delta T}{\partial x}$ 只要将实测异常前一个点(x+Δx)处的异常值减去后一个点 x 处的异常值，其差值除以点距 Δx 就可作为 x 点的水平一阶导数值。由于 Δx 是一个常数，因此上述差值不除以 Δx，其异常形态也是一样的。

计算 $\frac{\partial \Delta T}{\partial z}$ 时，也可仿照上述办法。先用向下延拓的办法计算出 $\Delta T(z+\Delta z)$，然后减去 $\Delta T(z)$，其差值就作为 $\frac{\partial \Delta T}{\partial z}$ 值。

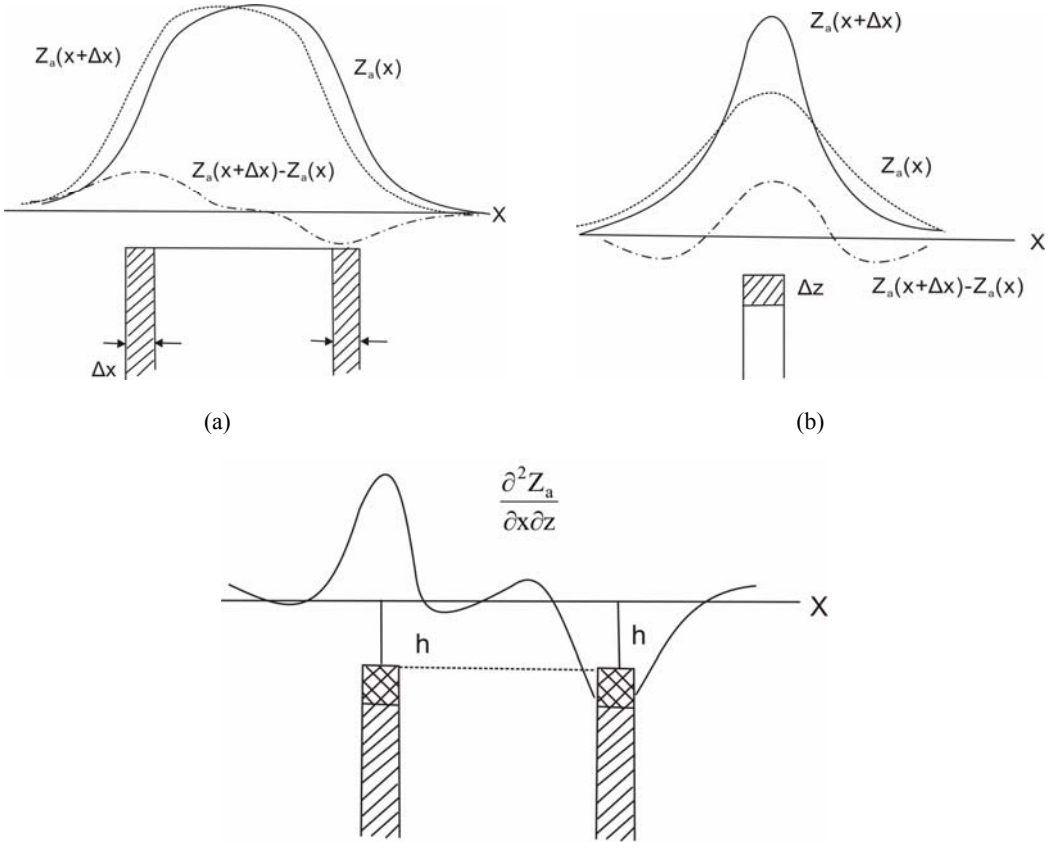


图 6-3-5　导数异常物理意义示意图

另外，也可以由式(6-3-2)对 Z 求导数，然后作近似积分，即可得到如下计算公式：

$$\frac{\partial \Delta T}{\partial z}=1.2732\Delta T-0.03979[\Delta T(h,0)+\Delta T(-h,0)]-0.1061[\Delta T(2h,0)+\Delta T(-2h,0)]$$
$$-0.0398[\Delta T(3h,0)+\Delta T(-3h,0)]-0.0212[\Delta T(4h,0)+\Delta T(-4h,0)]$$
$$-0.0133[\Delta T(5h,0)+\Delta T(-5h,0)]-0.0091[\Delta T(6h,0)+\Delta T(-6h,0)]$$
$$-0.0066[\Delta T(7h,0)+\Delta T(-7h,0)]-0.0051[\Delta T(8h,0)+\Delta T(-8h,0)]$$
$$-0.0040[\Delta T(9h,0)+\Delta T(-9h,0)]-0.0124[\Delta T(10h,0)+\Delta T(-10h,0)]$$

式中 h 为取样间隔。

根据导数异常的物理意义，它能用来解决下面几个方面的向题：

① 能区分相邻磁性体的异常，减少其相互叠加的影响。或者分离叠加在背景场中的局部场。

② 能减轻磁性围岩的干扰。因为磁性围岩异常经过导数换算后，异常的幅度和范围都会大大减小。

③ 可以将某些非二度异常转化为二度异常来进行解释。当对磁异常沿某方向求一阶导

数后，则相当于它的两侧边缘磁性体所产生的磁异常。显然这种异常更符合二度异常的条件。因而可以用二度异常来进行解释。

④ 能消除正常场背景值的影响。因为正常背景值的微商为零 ,因此对磁异常换算成导数异常后正常背景值就消失。

⑤ 用垂向二阶导数圈定磁性体的范围和位置。分析厚板状磁性体异常公式可知，其垂向二阶导数的零值点恰好为其边界的位置。对于一般棱柱体异常也具有同样的特点。因此，若将实测异常换算成垂直磁化，再计算其垂向二阶导数后，其零值线基本上反映了磁性体的范围。

但需要指出的是由于导数异常的计算与计算时使用的方法技术及参数选择有很大关系，因此还不能用于定量解释，而主要用于做定性解释。对于平面磁异常换算为垂向二次导数的方法原理与重力异常的换算方法一样。

第四节 频率域磁异常的处理与转换

把原观测平面的磁异常换算到某一高度（上下延拓），把实测的磁异常 ΔT 换算为 x_a，y_a，z_a 三个分量，或求其水平方向和垂直方向的导数，把斜磁化的磁异常化到地磁极等等，这些磁异常转换的方法在解释中得到广泛的应用。对实测的磁异常进行转换处理在频率域实现最为方便、快捷，所谓频率域位场转换是把空间域实测的磁异常通过傅立叶变换得到频谱，再乘以换算因子，反复换算来实现，人们习惯把空间域的磁异常通过傅立叶变换来实现各种换算称为频率域或波数域。

在频率域进行磁异常的转换，其最大优点是空间域的褶积关系变为频率域的乘积关系；同时还可以把各种换算统一到一个通用表达式中，从而使磁异常的换算变得简单。另一个优点则是可以从频谱特性出发，形象地讨论各种换算的滤波作用。

下面着重讨论三度异常在频率域中的各种换算，实测磁异常在水平观测面。

一、延拓

下面我们来推导频率域延拓公式。

（一）向上延拓

设场源位于 z=H 平面以下（H>0）,则磁场在 z=H 平面以上对 x、y、z 的连续函数，具有一阶和二阶连续可微的导数。若 z=0 观测平面上的磁场 T(x、y、0)为已知，则由外部狄里希莱问题，由

$$u_p = \frac{1}{2\pi}\iint_{\Pi}\left[-U_M \frac{\partial}{\partial\zeta}\left(\frac{1}{r}\right)dS\right]$$

得向上延拓公式为：

$$T(x,y,z) = \frac{-z}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{T(\xi,\eta,0)}{\left[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+z^2\right]^{3/2}}d\xi d\eta \qquad (6\text{-}4\text{-}1)$$

由褶积积分公式可知，上式为 T(x、y、0)与 $\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{-z}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{3/2}}$ 关于变量（x，y）的二维褶积。空间域的褶积与频率域的乘积相对应。下面分别求 T(x、y、0)及

$\frac{-z}{2\pi\left(x^2+y^2+z^2\right)^{3/2}}$ 的傅里叶变换。设 T(x、y、z)对于变量(x，y)的傅里叶变换为 $S_T\left(u,v,z\right)$，有：

$$S_T\left(u,v,z\right)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}T\left(x,y,z\right)e^{-2\pi i(ux+vy)}dxdy \tag{6-4-2}$$

当 $z=0$ 有

$$S_T\left(u,v,0\right)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}T\left(x,y,0\right)e^{-2\pi i(ux+vy)}dxdy \tag{6-4-3}$$

利用上式可以由已知的 $T\left(x,y,0\right)$ 求出其频谱 $S_T\left(u,v,0\right)$。进一步求 $\frac{-z}{2\pi\left(x^2+y^2+z^2\right)^{3/2}}$ 的傅里叶变换，应用 Erdelyi(1954)给出的积分变换表可以得到：

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{-z}{2\pi\left(x^2+y^2+z^2\right)^{3/2}}e^{-2\pi i(ux+vy)}dxdy=e^{2\pi\left(u^2+v^2\right)^{1/2}\cdot z} \tag{6-4-4}$$

当 z<0 时上式成立。由褶积定理有：

$$S_T\left(u,v,z\right)=S_T\left(u,v,0\right)e^{2\pi\left(u^2+v^2\right)^{1/2}\cdot z} \tag{6-4-5}$$

上式对于 $z\le 0$ 成立。

$T\left(x,y,z\right)$ 是 $S_T\left(u,v,z\right)$ 的反傅里叶变换，即

$$T\left(x,y,z\right)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}S_T\left(x,y,0\right)e^{2\pi\left(u^2+v^2\right)^{1/2}\cdot z}e^{2\pi i(ux+vy)}dudv \tag{6-4-6}$$

式（6-4-6）即为向上延拓的频谱表达式。

（二）向下延拓

我们还可把这一表达式进一步推广到 0<z<H 的情况。假如我们已知 z=h(0<h<H)平面上的场值，则根据向上延拓公式，可求出向上延拓距离为 h 的平面（即 z=0 平面）上的场值：

$$T\left(x,y,0\right)=\frac{-h}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{T\left(\xi,\eta,h\right)}{\left[\left(x-\xi\right)^2+\left(y-\eta\right)^2+h^2\right]^{3/2}}d\xi d\eta$$

根据上面同样的推导方法可以求得：

$$S_T\left(u,v,0\right)=S_T\left(u,v,h\right)e^{-2\pi\left(u^2+v^2\right)^{1/2}\cdot h}$$

所以

$$S_T\left(u,v,h\right)=S_T\left(u,v,0\right)e^{2\pi\left(u^2+v^2\right)^{1/2}\cdot h}$$

上式对于 0<h<H 成立。这样就把表示式（6-5-1）扩展到场源以上的 $-\infty<z<H$。

式（6-4-6）表明，由 z=0 平面上的磁场值，求出它的傅里叶变换 $S_T\left(u,v,0\right)$，由它乘以延拓因子 $e^{2\pi\left(u^2+v^2\right)^{1/2}\cdot z}$（$-\infty<z<H$，z>0 时向下延拓，z<0 时向上延拓），然后通过反傅里叶变换，即可求出 z<H 空间磁场的表示式。

二、导数换算

磁异常的导数可以突出浅而小的地质体的异常特征而压制区域性深部地质因素的影响，在一定程度上可以划分不同深度和大小异常源产生的叠加异常，且导数的次数越高，这种分辨能力就越强。

磁异常高阶导数可以将几个互相靠近、埋深相差不大的相邻地质因素引起的叠加异常划分开来，如图 6-4-1 所示。

这些功能主要是因为导数阶次越高，则异常随中心埋深加大而衰减越快，从水平方向来看，基于同样道理，阶次越高的异常范围越小，因而无论从垂向看或从水平方向看，高阶导数异常的分辨能力提高了。

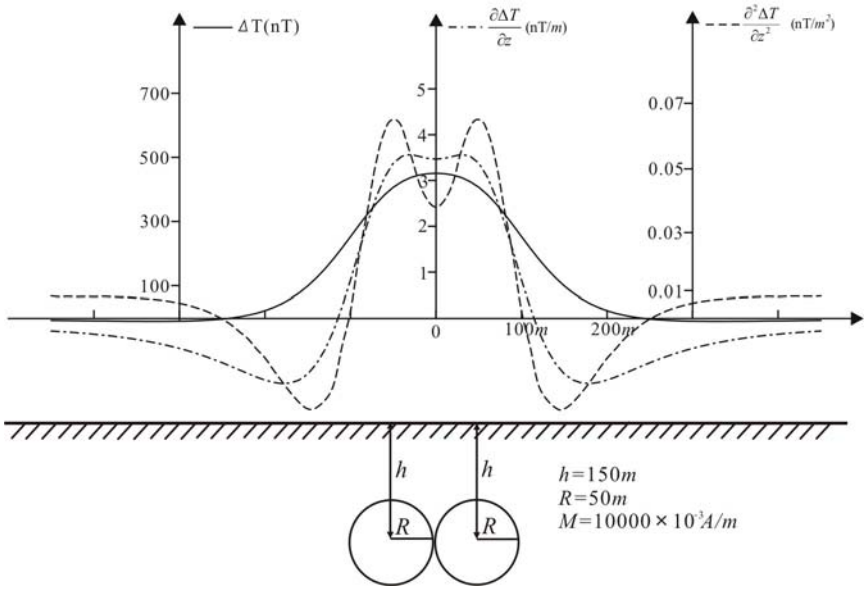


图 6-4-1 两个相邻球体异常的叠加

下面我们来推导磁异常导数换算的公式。

如果令 $S_{Tx}(x,y,z)$、$S_{Ty}(x,y,z)$、$S_{Tz}(x,y,z)$ 及 $S_{Txx}(x,y,z)$、$S_{Tyy}(x,y,z)$、$S_{Tzz}(x,y,z)$ 分别为 $\Delta T(x,y,z)$ 对 x、y、z 的一阶导数及二阶导数的频谱，则由微分定理易于得到：

$$S_{Tx}(u,v,z)=2\pi iuS_T(u,v,0)e^{2\pi\left(u^2+v^2\right)^{1/2}\cdot z}$$

$$S_{Ty}(u,v,z)=2\pi ivS_T(u,v,0)e^{2\pi\left(u^2+v^2\right)^{1/2}\cdot z}$$

$$S_{Tz}(u,v,z)=2\pi\left(u^2+v^2\right)^{1/2}S_T(u,v,0)e^{2\pi\left(u^2+v^2\right)^{1/2}\cdot z}$$

同理，可以写出：

$$\begin{Bmatrix}S_{Txx}\\S_{Tyy}\\S_{Tzz}\end{Bmatrix}(u,v,z)=\begin{Bmatrix}(2\pi iu)^2\\(2\pi iv)^2\\\left[2\pi\left(u^2+v^2\right)^{1/2}\right]^2\end{Bmatrix}S_T(u,v,0)e^{2\pi\left(u^2+v^2\right)^{1/2}\cdot z}$$

由此可知，求磁场的 n 阶垂向导数的频谱，应乘上的导数因子为 $\left[2\pi\left(u^2+v^2\right)^{1/2}\right]^h$；而求磁场沿 x 方向或 y 方向的 n 阶水平导数的频谱，应乘上的导数因子为 $\left(2\pi iu\right)^n$ 或 $\left(2\pi iv\right)^n$。

如果求磁场的 m 阶垂向导数、n 阶沿 x 方向水平导数及 l 阶沿 y 方向的导数的频谱（即求 $\frac{\partial^{(n+l+m)}\Delta T\left(x,y,z\right)}{\partial x^n y^l \partial z^m}$ 的频谱），应乘上的导数因子为

$$\left(2\pi iu\right)^n\left(2\pi iv\right)^l\left[2\pi\left(u^2+v^2\right)^{1/2}\right]^m \tag{6-4-7}$$

进一步设 l 是实测平面上任一方向，它与 x 轴的夹角为 α，则有

$$\frac{\partial S_T\left(x,y,z\right)}{\partial l}=\cos\alpha\frac{\partial S_T\left(x,y,z\right)}{\partial x}+\sin\alpha\frac{\partial S_T\left(x,y,z\right)}{\partial y}$$

两边作傅氏变换并应用微分定理，得知：

$$S_{Tl}\left(u,v,z\right)=i(2\pi u\cos\alpha+2\pi u\sin\alpha)S_T\left(u,v,z\right)$$

利用上式即可实现磁场的频率域方向导数计算，以此突出某一方向的异常特征。

三、分量换算

由磁场与磁位的关系可以得到以下磁场各分量之间的关系式：

$$\frac{\partial Z_a}{\partial x}=\frac{\partial X_a}{\partial z},\ \frac{\partial Z_a}{\partial y}=\frac{\partial Y_a}{\partial x},\ \frac{\partial\Delta T}{\partial x}=\frac{\partial X_a}{\partial t_0},\ \frac{\partial\Delta T}{\partial y}=\frac{\partial Y_a}{\partial t_0},\ \frac{\partial\Delta T}{\partial z}=\frac{\partial Z_a}{\partial t_0}$$

上列式中 t_0 为地磁场方向的单位矢量。

若设 $S_x\left(u,v,z\right)$、$S_y\left(u,v,z\right)$、$S_z\left(u,v,z\right)$ 以及 $S_T\left(u,v,z\right)$ 分别为 $H_{ax}\left(x,y,z\right)$、$H_{ay}\left(x,y,z\right)$、$Z_a\left(x,y,z\right)$ 及其 $\Delta T\left(x,y,z\right)$ 的频谱。

利用频谱微分定理可得到以上各分量导数在频率域相应的换算关系式：

$$\left.\begin{aligned}S_x\left(u,v,z\right)&=\frac{2\pi iu}{2\pi\left(u^2+v^2\right)^{1/2}}\cdot S_z\left(u,v,z\right)\\S_y\left(u,v,z\right)&=\frac{2\pi iv}{2\pi\left(u^2+v^2\right)^{1/2}}\cdot S_z\left(u,v,z\right)\end{aligned}\right\} \tag{6-4-8}$$

$$\left.\begin{aligned}S_x\left(u,v,z\right)&=\frac{2\pi iu}{q_{t_0}}\cdot S_T\left(u,v,z\right)\\S_y\left(u,v,z\right)&=\frac{2\pi iv}{q_{t_0}}\cdot S_T\left(u,v,z\right)\\S_z\left(u,v,z\right)&=\frac{2\pi\left(u^2+v^2\right)^{1/2}}{q_{t_0}}\cdot S_T\left(u,v,z\right)\end{aligned}\right\} \tag{6-4-9}$$

式中 $q_{t_0}=2\pi\left[i\left(L_0u+M_0u\right)+N_0\left(u^2+v^2\right)^{1/2}\right]$，而 L_0、M_0、N_0 为地磁场单位矢量 t_0 的方向余弦。

利用式

$$T\left(u,v,z\right)=\frac{\mu_0}{4\pi}q_t\cdot q_l\cdot\int_0^{\infty}\tilde{V}\left(u,v,z-\xi\right)d\xi \tag{6-4-10}$$

除以原分量的方向余弦，再乘以新分量的方向余弦即可得新分量的频谱式。故频率域内任意两个分量间的换算因子为：

$$\frac{i\left(L_2u+M_2v\right)+N_2\left(u^2+v^2\right)^{1/2}}{i\left(L_1u+M_1v\right)+N_1\left(u^2+v^2\right)^{1/2}}=\frac{q_{t_2}}{q_{t_1}} \tag{6-4-11}$$

这里的 L_1、M_1、N_1 和 L_2、M_2、N_2 分别为原分量和要换算到的新分量的方向余弦。

四、磁化方向转换

由式（6-4-10）可以导出

$$\frac{q_{t_2}}{q_{t_1}}=\frac{2\pi\left[i\left(a_2u+\beta_2v\right)+\gamma_2\left(u^2+v^2\right)^{1/2}\right]}{2\pi\left[i\left(a_1u+\beta_1v\right)+\gamma_1\left(u^2+v^2\right)^{1/2}\right]} \tag{6-4-12}$$

式中：α_1、β_1、γ_1 为原磁化方向的方向余弦；α_2、β_2、γ_2 为新磁化方向的方向余弦（磁化方向即为磁化强度方向）。应当指出公式（6-4-12）适合于转换到任意磁化方向。

五、化到地磁极

把 ΔT 化到地磁极的过程包含了 ΔT 化 Z_a 的分量换算和斜磁化 Z_a 化垂直磁化 $Z_{a\perp}$ 的磁化方向换算。式（6-4-9）中的第三个式子已经实现了 $\Delta T\left(x,y,z\right)$ 与 $Z_a\left(x,y,z\right)$ 频谱之间的换算，下面我们来进一步推导斜磁化 Z_a 化到垂直磁化 $Z_{a\perp}$ 的公式。

磁化方向换算的方法是由斜磁化的磁场 Z_a 求垂直磁化方向的磁位 $U_{\perp}$，再由垂直磁化磁位 $U_{\perp}$ 求垂直磁化的磁场 $Z_{a\perp}$。

(1)垂直磁方向的磁位 $U_{\perp}$

$$U_{\perp}=-\int Z_{a1}dt_1 \tag{6-4-13}$$

Z_{a1} 是原斜磁化方向的磁场，上式表明垂直磁化磁位 $U_{\perp}$ 是 Z_{a1} 沿着原磁化方向 t_1 反方向的曲线积分。

由傅立叶变换可以写出 Z_{a1} 的频谱表达式

$$Z_{a1}(x,y,z)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}S_z(u,v,0)e^{2\pi(u^2+v^2)^{1/2}\cdot z}e^{2\pi i(ux+vy)}dudv \tag{6-4-14}$$

则

$$U_{\perp}(x,y,z)=-\iint_{-\infty}^{\infty}\int_{0}^{\infty}S_z(u,v,0)e^{2\pi(u^2+v^2)^{1/2}\cdot(z-r_1 l)}$$
$$\cdot e^{2\pi i[u(x-\alpha_1 l)+v(y-\beta_1 l)]}dldudv$$
$$=-\iint_{-\infty}^{\infty}S_z(u,v,0)e^{2\pi(u^2+v^2)^{1/2}\cdot z}\cdot e^{2\pi i(ux+vy)}$$
$$[\int_{0}^{\infty}e^{-l[2\pi i(\alpha_1 u+\beta_1 v)]}\cdot e^{-l[2\pi r_1(u^2+v^2)^{1/2}]}dl]dudv$$
$$=\iint_{-\infty}^{\infty}\frac{-1}{2\pi i(\alpha_1 u+\beta_1 v)+2\pi r_1(u^2+v^2)^{1/2}}$$
$$S_z(u,v,0)e^{2\pi(u^2+v^2)^{1/2}\cdot z}\cdot e^{2\pi i(ux+vy)}dudv$$
$$=-\iint_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{q_1}S_z(u,v,0)e^{2\pi(u^2+v^2)^{1/2}\cdot z}\cdot e^{2\pi i(ux+vy)}dudv$$

（6-4-15）

(2)由垂直磁化磁位$U_{\perp}$求垂直磁化磁场$Z_{a\perp}$：

$$Z_{a\perp}=-\frac{\partial U_{\perp}}{\partial z}$$
$$=\iint_{-\infty}^{\infty}\frac{2\pi(u^2+v^2)^{1/2}}{q_1}\cdot S_z(u,v,0)\cdot e^{2\pi(u^2+v^2)^{1/2}}\cdot e^{2\pi i(ux+vy)}dudv$$

（2-2-16）

由（6-4-16）式可以看出，由斜磁化Z_a化为垂直磁化的转换因子是：

$$\frac{2\pi(u^2+v^2)^{1/2}}{q_1}$$

（6-4-17）

q_1是原磁化方向的方向余弦。

因此，由ΔT化到地磁极的转换因子为

$$\frac{2\pi(u^2+v^2)^{1/2}}{q_0}\cdot\frac{2\pi(u^2+v^2)^{1/2}}{q_1}$$

（6-4-18）

若不考虑剩磁，即地磁场方向的方向余弦q_0与磁化方向的方向余弦一致，则上式可进一步化简为：

$$[\frac{2\pi(u^2+v^2)^{1/2}}{q_1}]^2$$

（6-4-19）

由于这种转换相当于把ΔT换算到地磁极的地磁场状态故称为化到地磁极。

图 6-4-2 是球体模型磁异常图。300 条线，每条线 300 个点，点线距 1 公里。当地地磁倾角 45^0，测线东西向，地磁偏角-2.5^0。图 6-4-3 是频率域化极处理结果。

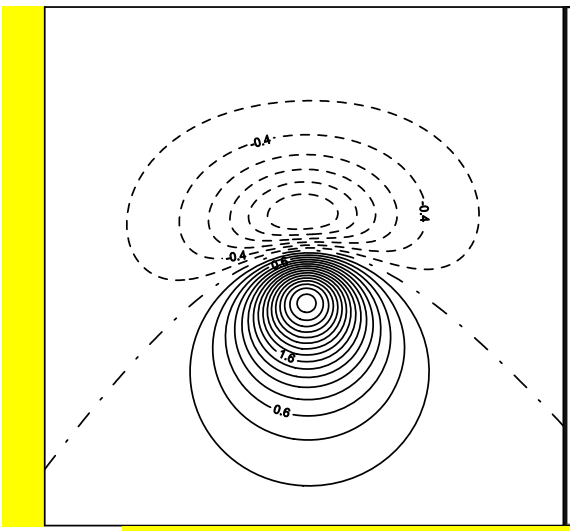


图 6-4-2 球体模型磁异常图

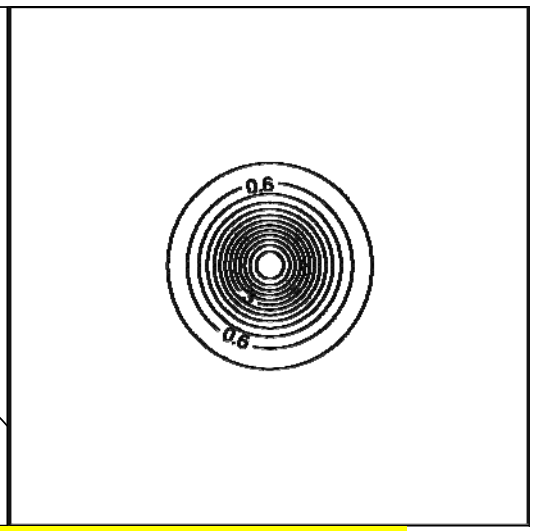


图 6-4-3 频率域化极处理结果

六、磁源重力异常

由泊松公式，可导出垂直磁化时磁位 $U_{\perp}$ 与磁源重力异常关系(或称假重力异常)关系

$$U_{\perp} = -\frac{M}{4\pi G\sigma}\frac{\partial V}{\partial z} = \frac{M}{4\pi G\sigma}g, g = -\frac{M}{4\pi G\sigma}U_{\perp}$$

将上式转换到频率域，并设化到垂直磁化时磁位及磁源重力异常的频谱为 $S_{U\perp}(u,v,z)$ 与 $S_g(u,v,z)$。对 ΔT 而言，$U_{\perp}$ 相当于 ΔT 经化到磁极运算得到 $Z_{a\perp}$，再利用频谱微分定理关系式 $S_{Za\perp}(u,v,z)=2\pi(u^2+v^2)^{1/2} S_{U\perp}(u,v,z)$,则可由 $S_{Za\perp}$ 求 $S_{U\perp}$ 最后得由 $\Delta T(u,v,z)$ 求 $S_g(u,v,z)$ 的转换因子为

$$\frac{4\pi G\sigma}{M}\cdot\frac{2\pi(u^2+v^2)^{1/2}}{q_0\cdot q_1}$$

为使上式计算简单，且不影响磁源重力异常的特征，常设 $\frac{G\sigma}{M}=1$。

分析 ΔT 换算磁源重力异常的因子可得，该换算因子由三部分组成：由 ΔT 换算 Za 的分量换算因子为 $\frac{2\pi(u^2+v^2)^{1/2}}{q_0}$，由 Za 换算 $Z_{a\perp}$ 的磁化方向换算因子为 $\frac{2\pi(u^2+v^2)^{1/2}}{q_1}$，这两个因子的组合即为化极因子。由 $Z_{a\perp}$ 换算 Δg 的换算因子为 $\frac{4\pi G\sigma}{M}\cdot\frac{1}{2\pi(u^2+v^2)^{1/2}}$。因此，由 ΔT 换算磁源重力异常的过程包含三步：$\Delta T \rightarrow Za \rightarrow Za_{\perp} \rightarrow \Delta g$。

七、 频率域磁场换算的通式

由于频率域中的各种换算都以乘上一个因子的形式出现，因此可以用一个统一的形式来表示。若设 $S_{T_1}(u,v,0)$ 为观测面上某一观测方向上磁场分量的频谱，$S_{T_2}(u,v,z)$ 为经过空间换算、导数换算、分量换算和磁化方向换算后的磁场任一分量的频谱，则有关系式：

$$S_{T_2}(u,v,z)=\frac{q_{l_2}}{q_{l_1}}\cdot\frac{q_{t_2}}{q_{t_1}}\cdot(2\pi iu)^n\cdot(2\pi iv)^l\left[2\pi\left(u^2+v^2\right)^{1/2}\right]^m\cdot e^{2\pi\left(u^2+v^2\right)^{1/2}\cdot z}\cdot S_{T_1}\quad(6\text{-}4\text{-}20)$$

式中：$\frac{q_{l_2}}{q_{l_1}}$ 为磁化方向换算因子；$\frac{q_{t_2}}{q_{t_1}}$ 为分量换算因子，$(2\pi iu)^n\cdot(2\pi iv)^l\left[2\pi\left(u^2+v^2\right)^{1/2}\right]^m$ 为导数换算因子；$e^{2\pi\left(u^2+v^2\right)^{1/2}\cdot z}$ 为空间换算因子；$q_{l_1}=2\pi\left[i\left(a_1u+\beta_1v\right)+\gamma_1\left(u^2+v^2\right)^{1/2}\right]$；$q_{l_2}=2\pi\left[i\left(a_2u+\beta_2v\right)+\gamma_2\left(u^2+v^2\right)^{1/2}\right]$ ； $q_{t_1}=2\pi\left[i\left(L_1u+M_1v\right)+N_1\left(u^2+v^2\right)^{1/2}\right]$ ；$q_{t_2}=2\pi\left[i\left(L_2u+M_2v\right)+N_2\left(u^2+v^2\right)^{1/2}\right]$。$\alpha_1,\beta_1,\gamma_1$ 为原磁化方向的方向余弦，$\alpha_2,\beta_2,\gamma_2$ 为新磁化方向的方向余弦；L_1,M_1,N_1 为原分量的方向余弦，L_2,M_2,N_2 为新分量方向的方向余弦。

(6-4-21)

八、 几种换算的滤波作用

（一）磁异常的转换与电滤波的相似性

我们知道，对无线电技术中的滤波来讲，滤波器的输入和输出可以是随时间变化的电压，线性滤波器的输入 $\varepsilon_i(t)$ 和输出 $\varepsilon_0(t)$ 的关系可用一个褶积型的积分方程式表示：

$$\varepsilon_i(t)=\int_{-\infty}^{\infty}\varepsilon_i(t-\tau)\varphi(\tau)d\tau\quad(6\text{-}4\text{-}22)$$

函数 $\varphi(\tau)$ 称为权函数，反映了滤波器的特性，也称滤波器的脉冲响应函数。对褶积积分方程进行傅里叶变换就可得到频率域输入-输出方程：

$$E_0(\omega)=E_i(\omega)\cdot\Phi(\omega)\quad(6\text{-}4\text{-}23)$$

式中 $E_0(\omega)$、$E_i(\omega)$ 和 $\Phi(\omega)$ 分别为 $\varepsilon_0(t)$、$\varepsilon_i(t)$ 和 $\Phi(t)$ 的傅里叶变换；$\omega=2\pi f$ 称为角频率；$\Phi(\omega)$ 为滤波权函数的频谱，也称为滤波器的频率响应函数。

对于磁异常转换，若设转换前后的二度磁异常分别为 $Z(x)$ 及 $Z_b(x)$，则可对空间磁异常的转换写出其一般形式：

$$Z_b(x)=\int_{-\infty}^{\infty}Z(x-\xi)\varphi(\xi)d\xi\quad(6\text{-}4\text{-}24)$$

这也是一个褶积方程，$\varphi(x)$ 为参加磁异常换算的函数。

如向上延拓，可表示为

$$Z_a(x,h)=\int_{-\infty}^{\infty}Z_a(x-\xi,0)\cdot\frac{h}{\pi\left(\xi^2+h^2\right)}d\xi$$

同样，也可写出频率域内磁异常转换的关系式：

$$S_b(\omega)=S(\omega)\cdot\Phi(\omega) \qquad (6\text{-}4\text{-}25)$$

式中$S_b(\omega)$、$S(\omega)$、$\Phi(\omega)$分别为$Z_b(x)$、$Z(x)$及$\varphi(x)$的频谱。

若将磁异常变换在空间域、频率域的表达式与滤波器在时间域、频率域的输入-输出方程式作一对比，可以发现二者是相似的。转换前后的异常对应于输入、输出电压，转换时参加运算的函数$\varphi(x)$则对应于滤波器的权函数，这里所不同的仅仅是电压是时间的函数，而磁异常是空间坐标的函数。因此，我们可以把磁异常的转换看成是对异常的滤波，有关滤波的一些基本理论都能用于磁异常的转换。

（二）几个常用换算的滤波作用

磁异常的换算相当于一种滤波，滤波器的权函数就反映了换算的特性。在频率域通过研究权函数的频谱（即频率响应函数）来了解磁场换算的滤波作用,下面以二度异常的几种换算的频率响应为例来说明。

图 6-4-4 为向上延拓、向下延拓、垂向一次导数、垂向二次导数的频率响应函数$\Phi(\omega)$随角频率ω变化的图形。

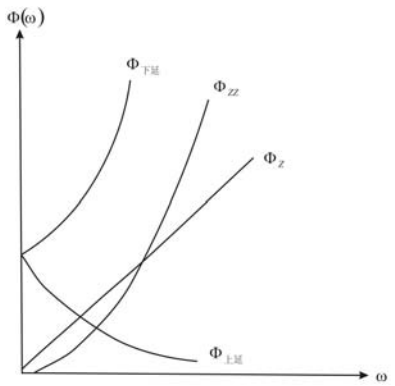


图 6-4-4 二度异常几种换算的频率响应曲线

由图可见，向上延拓的频率响应：$\Phi_{上延}(\omega)=e^{-h|\omega|}$

当$\omega=0$时，$\Phi(\omega)=0$；当ω趋于无穷时，$|\Phi(\omega)|$趋于零。它起到了压制高频让低频通过的作用，相当于一个低通滤波器。

向下延拓、垂向一次导数、垂向二次导数的频率响应分别为$e^{h|\omega|}$、ω、ω^2，由图形及分析频率响应的表达式容易知道三者都相当于一个高频放大器。比较二者，可以发现向下延拓的频率响应随ω增大，呈指数规律增加；当ω趋于无穷，Φ趋于无穷，它对高频放大作用特别明显，且是不收敛的，故在计算时要特别注意。在运算时常常加一个圆滑因子，以对高频放大作用进行一些抑制。其次，垂向二次导数的频率响应比垂向一次导数在高频放大作用上更强一些，因为它们随ω增大的规律与导数方次有关，垂向一次导数的频率响应是一条直线，而垂向二次导数的频率响应是二次曲线。导数次数愈高，愈要注意设法压制高频干扰。

九、 例：铁山、鄂城岩体的ΔT异常化极

在垂直磁化条件下，磁异常的形态以及磁异常与磁性体的关系都比较简单，便于进行地质解释。但我国处于中纬度地区，磁性体受斜磁化影响，其异常一般都有正、负两个部分，异常与磁性体的关系也比较复杂，解释的难度比较大的。解决这个问题的办法之一是对ΔT磁异常作化到地磁极处理。

图 6-4-5 是湖北铁山、鄂城岩体的ΔT 磁异常，其正、负值范围与岩体界线(点线表示)不符。化到地磁极后，磁异常正值部分与岩体边界有较好的对应关系(图 6-4-6)。

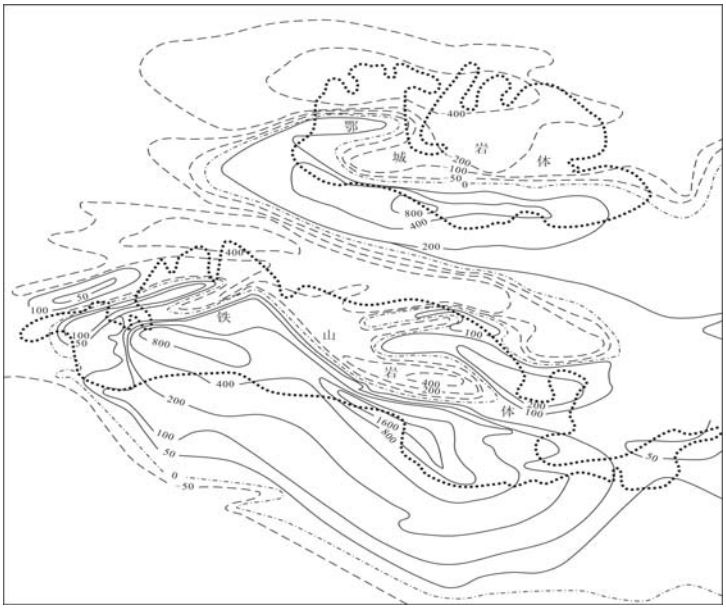


图 6-4-5 湖北铁山、鄂城岩体的ΔT 磁异常

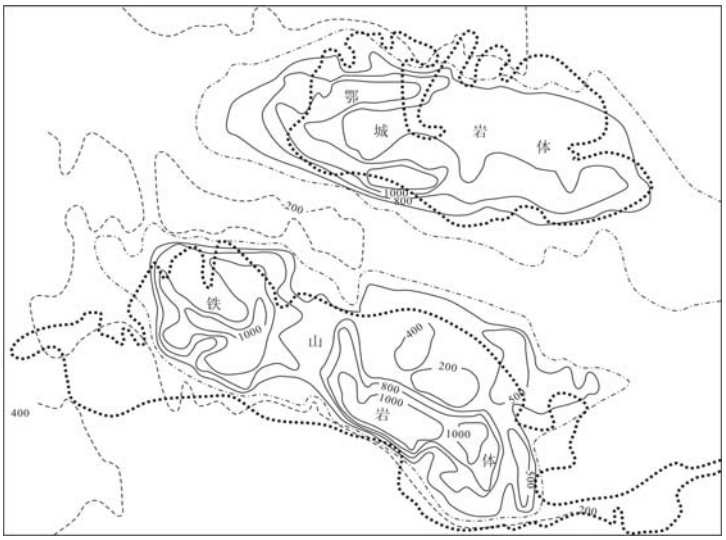


图 6-4-6 湖北铁山、鄂城岩体的ΔT 磁异常化到地磁极

第五节 维纳滤波与匹配滤波

我们知道，浅源地质体所产生的磁异常比深源地质体产生的磁异常要尖锐得多。浅源地质体所产生的磁异常特征是尖锐，异常幅值衰减快速，以高频成份为特征。而深源地质体所产生的磁异常宽缓，衰减缓慢，以中低频成份为特征。异常频谱特征的这种差异，提供了分离浅源场和深源场的可能性。1966 年，Bhattacharyya 详细研究了矩形棱柱体总磁异常的连续谱，1970 年，Spector 与 Grant 运用统计结构的基本假设，引入“总体平均”的概念，推导分析了航磁异常的能谱公式，把关于矩形棱柱体的谱的某些性质推广到块状体，讨论了块状体的水平尺寸、深度和厚度对谱的影响，提出了用能谱分析来粗略估计块状体的埋深、延深的方法。1975 年，Spector 运用上述方法，提出了“匹配滤波”方法，并用此方法处理科迪雷拉山区的航磁异常，消除了浅层火山岩复盖的干扰 ， 从而得到与成矿有关的深部火成岩引起的磁异常。该方法的基础是最小均方差滤波器。

一、最小均方差滤波器与维纳滤波器

设 $g(x)$ 为 $f(x)$ 滤波后的输出函数，$s(x)$ 为期望输出，$h(x)$ 为脉冲响应，如使方差

$$Q=\int_{-\infty}^{\infty}[s(x)-g(x)]^2dx=\min \qquad (6\text{-}5\text{-}1)$$

则相应的滤波器称为最小方差滤波器，

$$g(x)=\int_{\alpha}^{\infty}f(x-\tau)h(\tau)d\tau$$

其中 $\alpha=-\infty$ 对应于物理不可实现系统，$\alpha=0$ 对应于物理可实现系统。则有：

$$Q=\int_{-\infty}^{\infty}[s(x)-\int_{-\infty}^{\infty}f(x-\tau)h(\tau)d\tau]^2dx=\min$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}s^2(x)dx-2\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(x-\tau)h(\tau)s(x)d\tau dx+\int_{-\infty}^{\infty}[\int_{-\infty}^{\infty}f(x-\tau)h(\tau)d\tau]^2dx$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}s^2(x)dx-2\int_{-\infty}^{\infty}R_{fs}(\tau)h(\tau)d\tau+\int_{-\infty}^{\infty}[\int_{-\infty}^{\infty}f(x-\tau)h(\tau)d\tau]^2dx$$

令 $T_1=\int_{-\infty}^{\infty}s^2(x)dx$　　$T_2=-2\int_{-\infty}^{\infty}R_{fs}(\tau)h(\tau)d\tau$　　$T_3=\int_{-\infty}^{\infty}[\int_{-\infty}^{\infty}f(x-\tau)h(\tau)d\tau]^2dx$

$$T_1=\int_{-\infty}^{\infty}s^2(x)dx=R_s(0)$$

$$T_2=-2\int_{-\infty}^{\infty}R_{fs}(\tau)h(\tau)d\tau$$

$$T_3=\int_{-\infty}^{\infty}[\int_{-\infty}^{\infty}f(x-\tau)h(\tau)d\tau]^2dx$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}(\int_{-\infty}^{\infty}f(x-\tau)h(\tau)d\tau\int_{-\infty}^{\infty}f(x-u)h(u)du)dx$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}h(\tau)h(u)(\int_{-\infty}^{\infty}f(x-\tau)f(x-u)dx)d\tau du$$

令 $v=x-u$，　$\int_{-\infty}^{\infty}f(x-\tau)f(x-u)dx=\int_{-\infty}^{\infty}f(v)f(v+(u-\tau))dv$

$$T_3=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}h(\tau)h(u)R_f(u-\tau)d\tau du$$

$$Q=R_s(0)-2\int_{-\infty}^{\infty}R_{fs}(\tau)h(\tau)d\tau+\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}h(\tau)h(u)R_{ff}(u-\tau)d\tau du$$

因为 $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}h(\tau)h(u)R_{ff}(u-\tau)d\tau du$ 是偶函数，则有：

$$Q=R_s(0)-2\int_{-\infty}^{\infty}R_{fs}(\tau)h(\tau)d\tau+\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}h^2(\tau)R_{ff}(u-\tau)d\tau du$$

选择合适的脉冲响应 $h(x)$ 使 Q 最小，也就是求等式右方泛函的极值。由变分法知道 $h(x)$ 应满足欧拉方程：

$$\frac{\partial Q}{\partial h(\tau)}=\frac{\partial}{\partial h(\tau)}[R_s(0)-2\int_{-\infty}^{\infty}R_{fs}(\tau)h(\tau)d\tau+\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}h^2(\tau)R_{ff}(u-\tau)d\tau du]=0$$

即有：

$$\frac{\partial Q}{\partial h(\tau)}=\frac{\partial}{\partial h(\tau)}[\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}h^2(\tau)R_{ff}(u-\tau)d\tau du-2\int_{-\infty}^{\infty}R_{fs}(\tau)h(\tau)d\tau]=0$$

即应满足：

$$R_{fs}(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty}h(\tau)R_{ff}(u-\tau)du=h(\tau)*R_{ff}(\tau)$$

其中 R_{fs} 为输入信号 $f(x)$ 与期望输出 $s(x)$ 的互相关函数，R_{ff} 为输入信号 $f(x)$ 的自相关函数。上式即 Wiener-Hopf 积分方程。对上式作富氏变换得到

$$H(\omega)=\frac{P_{fs}(\omega)}{P_f(\omega)} \qquad (6\text{-}5\text{-}2)$$

其中 H(ω)是维纳滤波器的频率响应。$P_{fs}(\omega)$为输入函数 f(x)与期望输出信号 s(x)的互功率谱。若假定信号 s(x)与干扰 n(x)彼此不相关，即 Rns(x)=0,Pns(ω)=0 则

$$P_{fs}(\omega)=P_s(\omega)+P_{ns}(\omega)=P_s(\omega)$$

$$P_f(\omega)=P_s(\omega)+P_n(\omega)$$

则式(6-5-2)变为

$$H(\omega)=\frac{p_s(\omega)}{p_s(\omega)+p_n(\omega)}$$

因为 Ps(ω)=S*(ω)·S(ω),Pn(ω)=N*(ω)·N(ω),其中*表示共轭。得

$$H(\omega)=\frac{|S(\omega)|^2}{|S(\omega)|^2+|N(\omega)|^2} \qquad (6\text{-}5\text{-}3)$$

这样就从一般形式的维纳滤波器得到特殊形式的维纳滤波器。

二、浅源场和深源场分离

（一）维纳滤波器

对于式(6-5-3)，为了求出有用信号（或称深源场，区域场）的频谱｜S(ω)｜和干扰（或称浅源场，局部场）的频谱｜N(ω)｜，我们不妨假设

$$|S(\omega)|=AF_1(\omega)e^{-\omega h_1}$$

$$|N(\omega)|=BF_2(\omega)e^{-\omega h_2}$$

即有用信号及干扰(或称区域场及局部场)分别由埋深 h_1 和 $h_2(h_1>h_2)$的地质体所引起，当地质体形态相近时，

$$F_1(\omega)=F_2(\omega)$$

由此可得区域场的频率响应 $H_R(\omega)$：

$$H_R(\omega)=\frac{A^2F_1^2(\omega)e^{-2\omega h_1}}{A^2F_1^2(\omega)e^{-2\omega h_1}+B^2F_2^2(\omega)e^{-2\omega h_2}}=\frac{1}{1+\frac{B^2}{A^2}e^{2\omega(h_1-h_2)}} \qquad (6\text{-}5\text{-}4)$$

局部场的频率响应 $H_L(\omega)$：

$$H_L(\omega)=\frac{1}{1+\frac{A^2}{B^2}e^{2\omega(h_2-h_1)}}$$

式中的 A，B，h_1，h_2 四个值由实测数据的对数功率谱曲线上求得。

根据实测数据的对数功率谱曲线 lnE(ω)，取低频段斜率绝对值较大的直线段作为深部场源的反映，并且这段直线的纵轴截距为 A^2，斜率一半的负数为 h_1，中高频段斜率较小的直线段为浅部场源的反映，并用其截距求出 B^2，用斜率之半的负数求 h_2，如图 6-5-1 所示。

（二）匹配滤波器

如果令 S(ω)与 N(ω)相同相位(水平位置重合，深度不同的物体相位可以相同)，则式(6-5-3)可以得到另一种特殊形式的滤波器

$$H(\omega)=\frac{|S(\omega)|}{|S(\omega)|+|N(\omega)|}$$

即有区域场的频率响应 $H_R(\omega)$：

$$H_R(\omega)=\frac{1}{1+\frac{B}{A}e^{\omega(h_1-h_2)}}$$

局部场的频率响应 $H_L(\omega)$：

$$H_L(\omega)=\frac{1}{1+\frac{A}{B}e^{\omega(h_2-h_1)}}$$

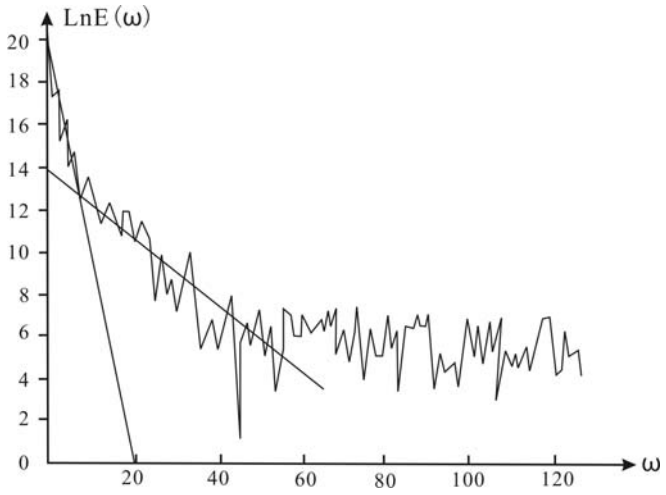


图 6-5-1 对数功率谱曲线

在实际应用中，维纳滤波与匹配滤波方法步骤如下：

1）利用傅里叶变换，由实测异常求频谱

$$S_{\Delta T}(f)=\int_{-\infty}^{\infty}\Delta T(x,0)e^{-2\pi ifx}dx$$

2）由傅里叶变换的实部与虚部求对数功率谱 lnE(ω)。

$$E(\omega)=R^2_e(\omega)+I^2_m(\omega)$$

3）根据对数功率谱曲线 lnE(ω)-ω 求 h_1，h2，B/A 等参数，构制维纳滤波与匹配滤波因子。

4）把实测异常频谱乘以相应滤波因子，得到浅源场（或深源场）的频谱。

5）反傅里叶变换得到分离的浅源场与深源场。

三、理论模型

图 6-5-2 是检验匹配滤波方法的有效性模型实例，剖面长 256 个测点，点距 10km。浅部场源的水平圆柱体中心埋深 100m，截面有效磁矩 $500 \cdot 10^{-3}Am^2$，深部场源的水平圆柱体中心埋深 300m，截面有效磁矩 $10000 \cdot 10^{-3}Am^2$，分别正演计算后再相加作为观测值。计算出对数功率谱后，人工用鼠标在屏幕上选择深源场(即低频段)和浅源场(即中高频段)的斜率和截距之比，得 h=75.85km，H=147.48km，B/b=10.0。由这些参数构制的匹配滤波器分离出的浅源场和深源场如图 6-5-2 所示，不难看出，匹配滤波法在一定条件下，即深浅场源靠得不是太近的情况下，能较好地分离出浅深不同地质体产生的场。

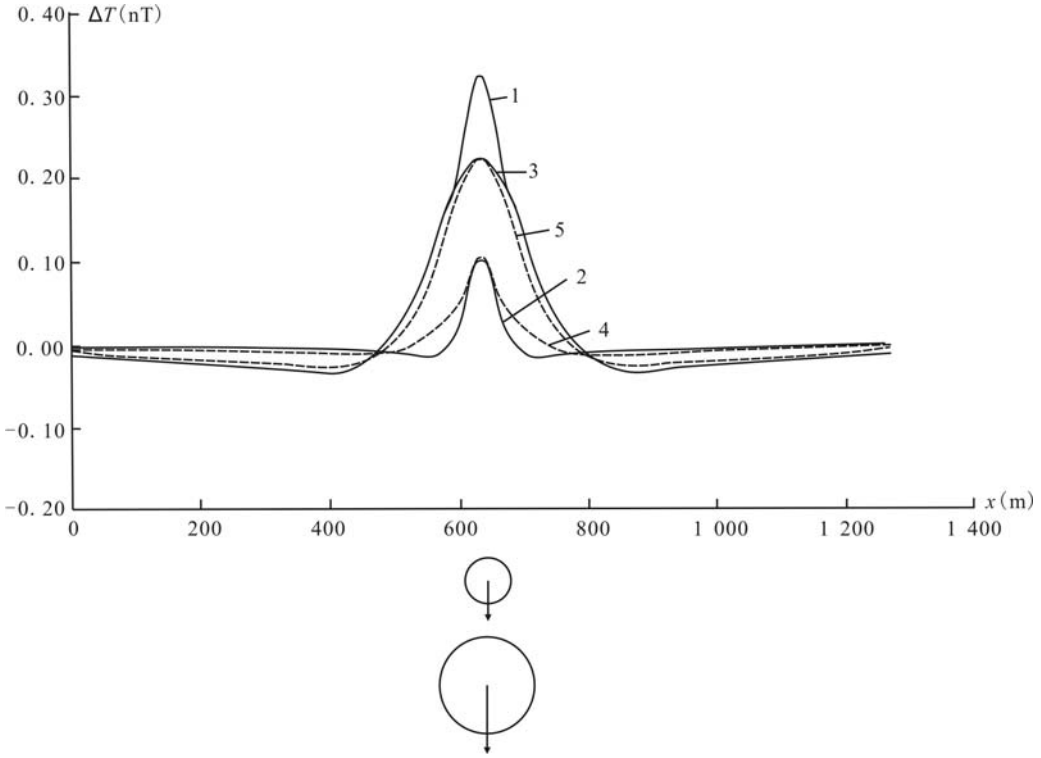


图 6-5-2　匹配滤波分离水平圆柱体理论模型的场

1、深、浅两个水平圆柱体磁场的理论值；2、浅部水平圆柱体磁场的理论值；3、深部水平圆柱体磁场；的理论值

4、分离后的浅源磁场；5、分离后的深源磁场。

第六节 重磁异常的对应分析

在重磁资料的解释中，综合利用多种信息，使资料彼此印证，互相充实，就可以减少多解性，改善解释的效果。本节讨论的重磁异常对应分析就是这类解释方法之一。

一、方法原理

由同一场源引起的重力异常和磁异常的关系可以用泊松方程描述，即

$$U = -\frac{M}{4\pi G\sigma} gradV$$

当垂直磁化时可以得到：

$$Z_{a\perp}=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{M}{G\sigma}V_{zz}=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{M}{G\sigma}\frac{\partial\Delta g}{\partial z}$$

上式表明 $Z_{a\perp}$ 与 $\partial\Delta g/\partial z$ 呈线性关系。由于实际资料中往往有区域背景场，采用下述公式更合适：

$$Z_{a\perp}=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{M}{G\sigma}\frac{\partial\Delta g}{\partial z}+A \qquad (6\text{-}6\text{-}1)$$

式中 A 反映了实测资料中与背景场有关的长波成分。由此可见，如果我们将磁测资料先进行化磁极处理得到 $Z_{a\perp}$，对重力资料求垂向一次导数得到 $\frac{\partial\Delta g}{\partial z}$，然后将 $Z_{a\perp}$ 和 $\frac{\partial\Delta g}{\partial z}$ 作线性回归分析，即可得到斜率 $\frac{\mu_0 M}{4\pi G\sigma}$ 和截距 A，显然由 $\frac{\mu_0 M}{4\pi G\sigma}$ 很容易得到比值 $\frac{M}{\sigma}$，称之为泊松比，它反映了在计算窗口范围内的平均物性特征。A 值的大小反映了重磁异常长波成分的差别。当然 A=0 是最理想的。在实际工作中，只要 A 值变化不大，表明具备泊松方程的应用前提，所得泊松比值就有一定意义。否则，若 A 值变化很大，说明在测区内背景值变化较大，或异常体彼此干扰较强，或剩磁影响较大，即不具备泊松公式的应用前提。因此，A 值的特征提供了所得泊松比值的可信程度。

在重磁对应分析中，相关系数是我们利用的一个重要参数。令 R 表示 $Z_{a\perp}$ 和 $\frac{\partial\Delta g}{\partial z}$ 的相关系数，则按定义有

$$R=\frac{\mathrm{cov}(Z_{a\perp},\partial\Delta g/\partial z)}{\sqrt{D(Z_{a\perp})}\sqrt{D(\partial\Delta g/\partial z)}} \qquad (6\text{-}6\text{-}2)$$

式中：$\mathrm{cov}(Z_{a\perp},\partial\Delta g/\partial z)=E[(Z_{a\perp}-E(Z_{a\perp}))\cdot(\partial\Delta g/\partial z-E(\partial\Delta g/\partial z))]$ 是 $Z_{a\perp}$ 和 $\partial\Delta g/\partial z$ 的协方差；E 表示数学期望；$D(Z_{a\perp})$ 和 $D(\partial\Delta g/\partial z)$ 分别为 $Z_{a\perp}$ 和 $\frac{\partial\Delta g}{\partial z}$ 的方差。R 的值在+1 和-1 之间。相关系数 R 反映了重磁资料在给定窗口内的线性相关程度。R 接近+1 时为正相关，反映了重力高与磁场高对应，或重力低与磁场低对应；R 接近-1 时为负相关，反映了重力高与磁场低对应，或重力低与磁场高对应。从地质解释的角度来看，相关系数 R 能帮助我们确定重磁异常的同源性。R 绝对值越小，例如小于 0.5，则可认为重磁异常不同源，或存在邻近异常的干扰，或存在方向异于地磁场的强剩磁等。因此，R 值不仅其本身反映了一定意义；而且 R 值的大小还提供了回归分析所得泊松比的可靠程度。

二、应用实例

对应分析在实际计算中是采用滑动窗口进行的。窗口的选择对结果的影响很大。一般来说，窗口大小的选取应考虑所研究的异常的波长、测点间距和邻近干扰的情况。同时又必须保持在一个窗口内有足够的点数。

实际资料往往是各种异常信息的综合效应。为取得较好的效果，在作重磁对应分析之前先要进行位场的分离，提取用于对应分析的区域异常或局部异常。

对区域场进行重磁对应分析可以用来研究深部地壳的特征。地壳的密度一般随深度逐渐增加。从地表的 2.7g/cm^3 逐渐增加，直到上地幔达 3.3g/cm^3。地壳磁性组分在一定深度内也有很强的磁化强度。因此地壳内部一些构造层厚度变化时，往往会产生重磁场之间的相关关系。若上部地壳厚度和组分相对稳定，则莫氏面的起伏往往引起重磁场的负相关。若重力低，

磁场高，表明地壳相对增厚；反之，表明地壳较薄。

对浅部场进行重磁对应分析，其正负相关取决于浅部岩层的密度和磁性情况，因而可用来研究浅部地层的岩性和构造特征。

在实际工作中也可对不同延拓高度的重磁场进行重磁对应分析。由于不同高度的重磁场反映了不同深度场源的场，因此这种分析有助于我们对场源垂向不均匀性有所认识。

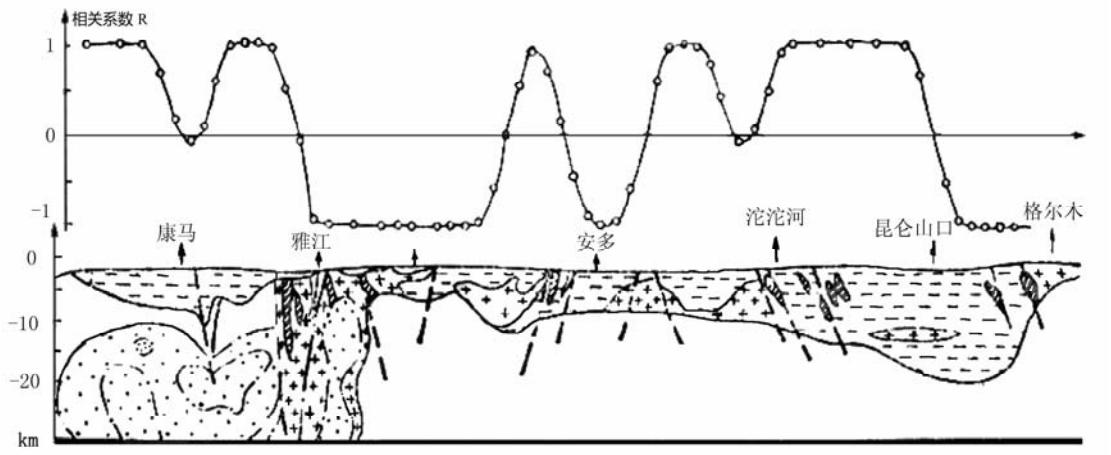


图 6-6-1 是我国亚东—格尔木地学断面上的重磁场上延 100km 后的相关系数图

图 6-6-1 是我国亚东—格尔木地学断面重磁场上延 100km 对应分析的结果。整个断面从南至北可划分为几段：①亚东至雅江以南以正相关为主，在康马附近有一相关系数突变为零的小段；②雅江以北到安多以南，呈负相关；③安多附近至沱沱河以南的正负相关变化段；④沱沱河以北至纳赤台附近的正相关段；⑤纳赤台以北的负相关段。这些分段与根据地质和其它地球物理资料划分的地体的位置大体相当。

*第七节 重磁异常的曲化平

我国是一个多山的国家，尤其是中西部地区，起伏地形不仅给野外勘探带来困难，而且也给资料的处理解释带来不便。为了便于对所得到的磁异常进行解释，需要将这些起伏地形测点上的磁异常值换算成某一水平面相应点上的异常值，即所谓曲化平处理。

把起伏地形上的重磁异常换算到水平面上，前人已做过大量的工作，如 Emila（1973）, Bhattacharyya 与 chen（1977）, Nakatsuka（1981）, Hansen 与 Miyazaki（1984）及国内的学者。利用位场理论将起伏地形的重磁异常换算单层或偶层形式的等效源，再由此等效源计算空间某一平面上的重磁场达到了曲化平的目的，这类方法通常称为等效偶层法，等效源法。此外，HanadersonCordell（1971）等把重磁场展成级数，求出级数的系数，再计算空间任一平面的重磁场，由此来实现重磁资料的曲化平，这类方法称为级数类方法。

用等效偶层法求解第一类 Fredholm 积分方程，需要求解一个高阶线性方程组，存在着计算效率和方法实用性等各种问题。

一、方法原理

等效偶层法曲化平其方法原理如下：

位场狄里希莱问题，可表示为

（1）在区域$\Omega(-\infty < Z < Z_0)$内位函数满足拉普拉斯方程；

（2）当 $Z \to -\infty$ 时，位函数趋于零；

（3）在区域 Ω 内某些点的位函数值是已知的。

上述定解问题的数学提法为

$$\begin{cases} \nabla^2 U(x,y,z) = 0 \\ U(x,y,z)/_{z\to_\infty} = 0 \\ U(x,y,z) = f_i \end{cases} \tag{6-7-1}$$

$U(x,y,z)$ 是区域 Ω 内的位函数。f_i 为曲面的 S 上位场值。任一调和函数在区域 Ω 内的解可以表示成如下形式

$$U(M) = \frac{1}{4\pi}\iint_S \frac{1}{\gamma}\frac{\partial U(P)}{\partial n}ds - \frac{1}{4\pi}\iint_S U(P)\frac{\partial}{\partial n}(\frac{1}{\gamma})ds \tag{6-7-2}$$

式（6-7-2）表示在区域 Ω 内任何一个在 $\Omega + S$ 上连续可微的调和函数，可以表示为单层位势（第一项）和双层位势（第二项）之和。根据位场的唯一性定理可知，只要在区域 Ω 内的边界面 S 上的位场值已知，区域 Ω 内的位场值就是唯一确定的。所以只要能找到在区域 Ω 内满足拉普拉斯方程，且在区域 Ω 的边界面 S 上满足边界条件的调和函数，则这个调和函数就是定解问题的解。由位势理论知，单层位势

$$U(M) = \iint_S \sigma(P)\frac{1}{\gamma}ds \tag{6-7-3}$$

和偶层位势

$$U(M) = \iint_S \mu(P)\frac{\partial}{\partial l}\left(\frac{1}{\gamma}\right)ds \tag{6-7-4}$$

在区域内均为调和函数，$\sigma(p)$ 和 $\mu(p)$ 是单层面密度和偶层面密度，l 为偶极方向，它们都是定解问题的解。若能根据边界条件求出 $\sigma(p)$ 或 $\mu(p)$，则就可以用单层位势或偶层位势来表示区域 Ω 内的位函数 U 。

式（6-7-4）就是第一类 Fredholm 积分方程，若能根据已知曲面上的位场值 $U(M)$ 求出偶层密度 $\mu(p)$，就能由 $\mu(p)$ 获得任意平面上的位场值。

当偶层位于观测曲面之上时，偶层位势式（6-7-4）可以表示为：

$$U(P_0) = \iint_S \mu(P)\frac{\partial}{\partial l}\left(\frac{1}{\gamma}\right)ds - 2\pi\cos\varphi \times \mu(P_0) \tag{6-7-5}$$

式中 $\cos\varphi$ 是偶层矩方向 $\vec{S_l}$ 与曲面外法线 $\vec{n}$ 的夹角。

式（6-7-2）第二类 Fredholm 积分方程，如果能够根据已知曲面上的观测值 $U(p_0)$ 求出偶层密度 $\mu(p)$，则由 $\mu(p)$ 可以获平面上的位场值。

求解式（6-7-3）、式（6-7-4）或式（6-7-5）的问题就是等效偶层法的曲化平。若把等效偶层放置在观测曲面上，则采用式（6-7-5）求解，若把等效偶层放在观测曲面的以下某一深度上，则采用式（6-7-4）求解。

求解上述的积分方程的困难在于高阶方程计算效率与占用计算机内存，如测区为100×100 测线与测点，则未知的偶层密度 $\mu(p)$ 有 10000 个，因此制约了等效偶层法曲化平的应用。高阶方程的求解问题可以利用小波压缩方法对积分方程降阶来实现。

二、理论模型

图 6-7-1 为起伏地形上水平圆柱体重力值及曲化平结果（圆柱体埋深 200 米），图中虚线表示在起伏地形上观测值，实线是曲化平之后的结果，可以看出曲化平后的曲线与水平地形上的理论值吻合。

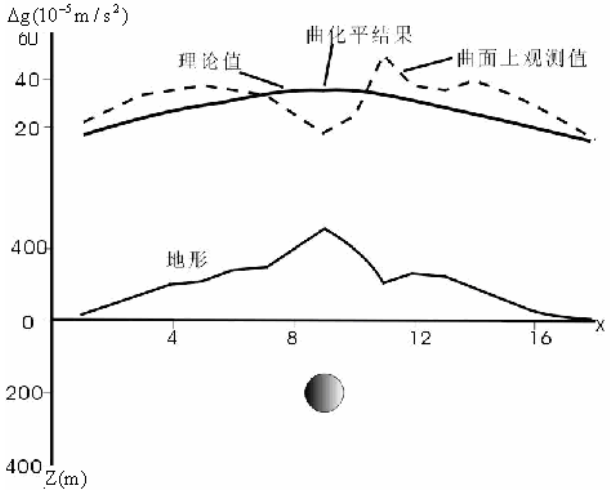


图 6-7-1 起伏地形上水平圆柱体重力值及曲化平结果

*第八节 小波分析方法

小波分析方法是近年来发展起来的新的数学方法，小波的概念最早由法国地球物理学家 J. Morlet 和 A. Grossmann 在 70 年代分析处理地震数据时提出的，以后又经 Meyer Y.，Mallat S G. 与 Daubechies I. 等数学家的一系列工作，小波变换已经有了比较系统的理论与计算方法，广泛的应用于信号处理、图像处理、模式识别、语言识别、地球物理勘探、CT 成像、计算机视觉、航空航天技术、故障监控、通信和电子系统等众多的学科和相关领域研究中。

小波变换是重磁异常分解的有效工具，利用小波多尺度分析方法，可以将重磁异常分解到不同尺度空间中，尺度大小决定了重磁异常所反映的地质体规模和埋深的大小。作为一种新而有效的位场分离途径，小波多尺度分析方法为重磁资料解释和地壳结构研究提供了新的思路，在国内外得到了广泛的应用。杨文采等（1995，1997，2001）对中国大陆布格重力异常进行了小波多尺度分解，得到中国大陆地壳内及上地幔各种尺度成分意义下密度不均匀分布情况，讨论了离散小波变换与重力异常多重分解的关系，提出了用不同尺度的小波细节部分作为局部重力场，用它们来描述不同深度的密度异常体，用低阶逼近部分作为区域重力场，描述地幔及地壳底界面的影响等等。

一、小波分析方法简介

（一）连续小波变换

连续小波变换(Continuous Wavelet Transform，CWT)亦称积分小波变换(Integral Wavelet Transform，IWT)，定义为

$$(\mathrm{CWT}_{\psi}\mathrm{f})(\mathrm{a,b})=|a|^{-1/2}\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\overline{\psi(\frac{t-b}{a})}dt \tag{6-8-1}$$

设定

$$\psi_{a,b}(t)=|a|^{-1/2}\psi(\frac{t-b}{a}),\qquad a\in R,a\neq 0;b\in R \tag{6-8-2}$$

则称函数系$\psi_{a,b}(t)$为小波函数（Wavelet Function）或简称为小波（Wavelet），它是由函数ψ（t）经过不同的时间尺度伸缩(Time Scale Dilation)和不同的时间平移(Time Translation)得到的。式（6-8-2)中的R表示实数域。因此，ψ（t）是小波原型(Wavelet Prototype)，并称为母小波（Mother Wavelet）或基本小波(Basic wavelet)。a是时间轴尺度伸缩参数，大的a值对应于小的尺度，相应的小波$\psi_{a,b}(t)$伸展较宽；反之，小的a值对应的小波在时间轴上受到压缩。b是时间平移参数，不同b值的小波沿时间轴移动到不同位置。系数$|a|^{-1/2}$是归一化因子，它的引入是为了使不同尺度的小波保持相等的能量。值得注意的是，对于不同的母小波，同一信号的连续小波变换是不同的。

将式(6-8-2)代人式(6-8-1)，得到连续小波变换的简化定义式

$$(CWT_{\psi}f)(a,b)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\overline{\psi_{a,b}(t)}dt=\left\langle f,\psi_{a,b}\right\rangle \tag{6-8-3}$$

即信号f（t）关于ψ（t）的连续小波变换等于f（t）与小波$\psi_{a,b}(t)$的内积，连续小波变换定量地表示了信号与小波函数系中的每个小波相关或接近的程度。如果把小波看成是L^2（R）空间的基函数系，那么，连续小波变换就是信号在基函数系上的分解或投影。

（二）离散小波变换与二进制小波变换

在实际应用中，尤其是在计算机上实现时，连续小波必须加以离散化。因此，有必要讨论连续小波$\psi_{a,b}(t)$和连续小波变换 $W_f(a,b)$的离散化。通常，把连续小波变换中尺度参数 a 和平移参数b的离散化公式分别取作$a=a_0^j,b=ka_0^jb_0$，这里$j\in Z$,扩展步长$a_0\neq 1$是固定值，为方便起见，总是假定$a_0>1$（由于m可取正也可取负，所以这个假定无关紧要）。所以对应的离散小波函数$\psi_{j,k}(t)$即可写作

$$\psi_{j,k}(t)=a_0^{-j/2}\psi(\frac{t-ka_0^jb_0}{a_0^j})=a_0^{-j/2}\psi(a_0^{-j}t-kb_0) \tag{6-8-4}$$

而离散化小波变换系数则可表示为

$$C_{j,k}=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\overline{\psi_{j,k}(t)}dt=\left\langle f,\psi_{j,k}\right\rangle \tag{6-8-5}$$

其重构公式为

$$f(t)=C\sum_{-\infty}^{+\infty}\sum_{-\infty}^{+\infty}C_{j,k}\psi_{j,k}(t) \tag{6-8-6}$$

C是一个与信号无关的常数。

然而，怎样选择 a_0 和 b_0，才能够保证重构信号的精度呢？显然，网格点应尽可能密（即 a_0 和 b_0 尽可能小），因为如果网格点越稀疏，使用的小波函数 $\psi_{j,k}(t)$ 和离散小波系数 $C_{j,k}$ 就越少，信号重构的精确度也就会降低。

上面是对尺度参数 a 和平移参数 b 进行离散化的要求。为了使小波变换具有可变化的时间和频率分辨率，适应待分析信号的非平稳性，我们很自然地需要改变 a 和 b 的大小，以使小波变换具有“变焦距”的功能。将连续小波只在尺度 a 上进行量化，平移参数 b 仍然连续变化不被离散，表示为

$$\psi_{j,k}(t)=2^{-j/2}\psi(\frac{t-k}{2^j}) \qquad j,k\in Z \tag{6-8-7}$$

称为二进小波（Dyadic Wavelet）。

二进小波对信号的分析具有变焦距的作用。假定有一放大倍数为 2^{-j}，它对应为观测到信号的某部分内容。如果想进一步观看信号更小的细节，就需要放大倍数即减小 j 值；反之，若想了解信号更粗的内容，则可以减小放大倍数，即加大 j 值。在这个意义上，小波变换被称为数学显微镜。

二进小波介于连续小波和离散小波之间，它只是对尺度参数进行了离散化，而对时间域上的平移参量保持连续变化，因此二进小波不破坏在时间域上的平移不变量，这个特点也是离散小波所不具有的。正因为如此，它在奇异性检测，图像处理方面都十分有用。

（三）多分辨分析

Meyer 于 1986 年创造性地构造出具有一定衰减性的光滑函数，其二进制伸缩与平移构成 L^2（R）的规范正交基，才使小波得到真正的发展。1988 年 S．Mallat 在构造正交小波基时提出了多分辨分析(Multi—Resolution Analysis)的概念，从空间的概念上形象地说明了小波的多分辨率特性，将此之前的所有正交小波基的构造法统一起来，给出了正交小波的构造方法以及正交小波变换的快速算法，即 Mallat 算法。Mallat 算法在小波分析中的地位相当于快速傅里叶变换算法在经典傅里叶分析中的地位。

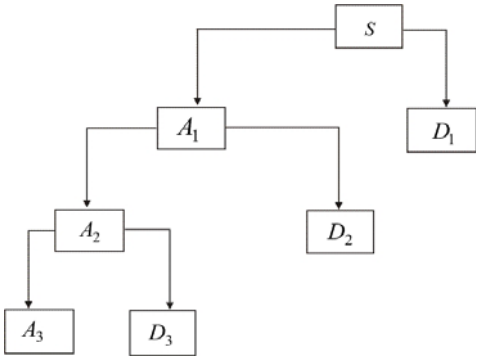


图 6-8-1 三层多分辨分析树结构图

关于对多分辨分析的理解，我们在这里以一个三层的分解进行说明，其小波分解树如图 6-8-1 所示。从图 6-8-1 可以明显看出，多分辨分析只是对低频部分进行进一步分解，而高频部分则不予以考虑。分解具有关系：S＝A3 十 D3 十 D2 十 D1。另外强调一点，这里只是以一个层分解进行说明，如果要进行进一步的分解，则可以把低频部分 A3 分解成低频部分 A4 和高频部分 D4，以下再分解依此类推。

二、组合球体理论模型

把上述多尺度分析方法应用于磁法勘探资料处理，野外观测值 ΔT 经一阶小波分解，得到局部场 $\Delta T_{局1}$ 和区域场 $\Delta T_{区1}$，把 $\Delta T_{区1}$ 作二阶小波分解得到 $\Delta T_{局2}$ 和 $\Delta T_{区2}$，再把 $\Delta T_{区2}$ 作三阶小波分解可得 $\Delta T_{局3}$ 和 $\Delta T_{区3}$，……，如此分解下去。

为了阐述小波多尺度分解用于位场分离的效果，我们设计了如图 6-8-2（a）的模型，4 个球体埋深分别为 D_1=50m，D_2=200m，D_3=500m，D_4=800m，半径分别为 15m，30m，50m，120m，磁化强度 100000×10^{-3}A/m，为简单起见，磁化倾角 I 取 90^0，理论模型正演计算 ΔT 如图 6-8-2

（b）所示，它们的极大值分别为 2004nT，277nT，78nT，282nT,由图可以看出：

（1）一阶细节，由功率谱分析得出它反映场源深度大约 16m，埋深为 50m 的球体在一阶细节图上极大值为 1607nT（图 6-8-2（c)），可以看出它主要分离出埋深为 50m 球体的磁场。

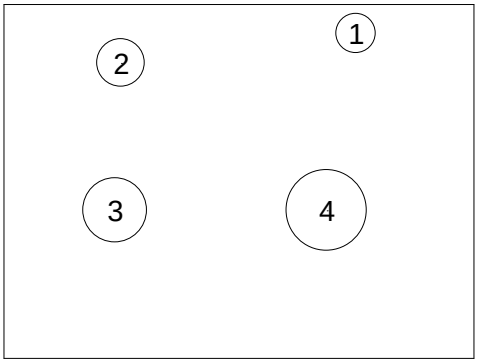
（2)二阶细节,反映场源深度大约 71m,埋深为 50m 的球体在二阶细节图上极大值为 340nT（图 6-8-2（d)），可以看出，一、二阶细节把埋深为 50m 的球体的磁场已几乎全部分离了。但埋深为 200m，500m，800m 球体的磁场也有部分反映在二阶细节中，它们的极大值为 113nT，17nT，30nT。

（3）三阶细节，反映场源深度大约 194m，埋深 200m 球体异常十分显著，最大值为 68nT（图 6-8-2（e)），它主要分离出埋深为 200m 的球体的磁场，但埋深为 500m，800m 球体的磁场也有部分反映在三阶细节。

（4）四阶细节，反映场源深度大约 456m，此时 50m，200m 球体影响已很小，极大值只有 4nT，23nT，而埋深 500m，800m 球体异常较强（图 6-8-2（f))。

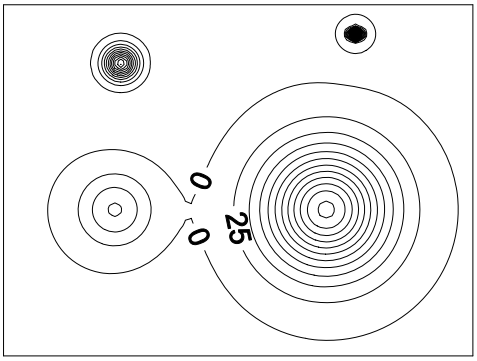
（5）五阶细节，反映场源深度大约 780m（图 6-8-2（g)），可以看出埋深为 50m，200m，500m 的三个球体异常已完全消失，该图只剩下埋深 800m 球体的部分磁场，而五阶逼近已没有 4 个球体局部异常的特征。

由以上分析我们得出：小波多尺度分解可以把不同深度磁性体产生的磁场在一定的程度上分离，如上述理论模型，五阶细节主要反映了 800m 深的磁性体产生的异常，而 50m，200m，500m 深磁性体的影响已经可以排除。因此，我们可以用这种方法去识别与提取局部异常。



(a) 垂直磁化球体理论模型

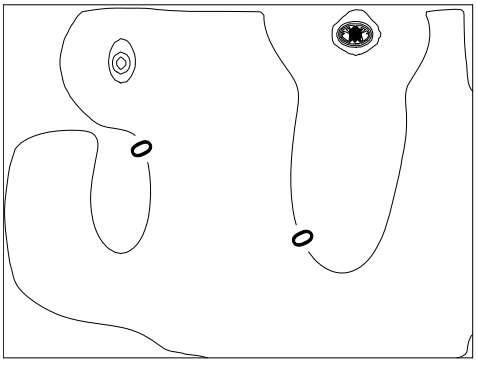
球体埋深 D1=50m, D2=200m, D3=500m, D4=800m



(b)垂直磁化球体理论模型磁场正演

ΔT1max=2004nT ΔT2max=277nT

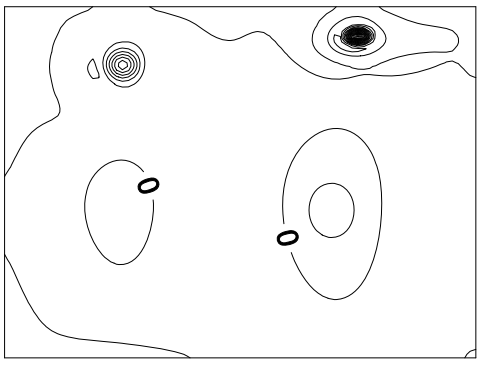
ΔT3max=78nT ΔT4max=282nT



(c)小波分解一阶细节(场源似深度 16m)

ΔT1max=1607nT ΔT2max=68nT

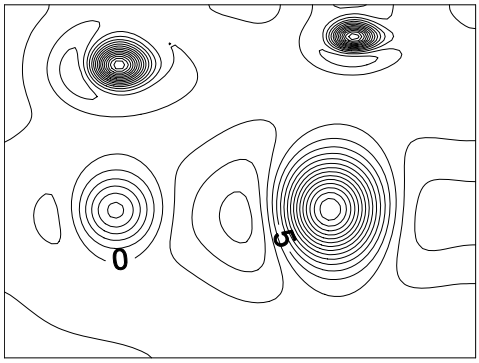
ΔT3max=2nT ΔT4max=2nT



(d) 小波分解二阶细节(场源似深度 71m)

ΔT1max=340nT ΔT2max=113nT

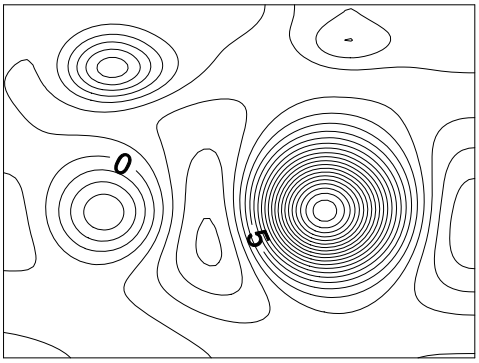
ΔT3max=17nT ΔT4max=30nT



(e)小波分解三阶细节(场源似深度 194m)

ΔT1max=57nT　ΔT2max=68nT

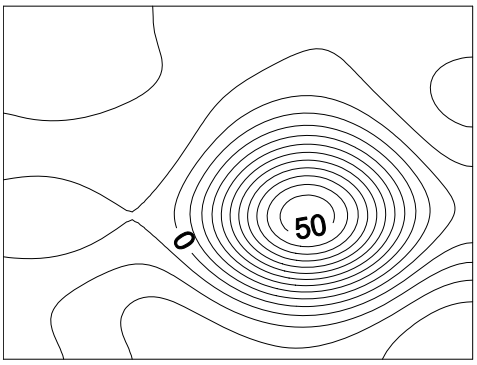
ΔT3max=26nT　ΔT4max=68nT



(f)小波分解四阶细节(场源似深度 456m)

ΔT1max=4nT　ΔT2max=23nT

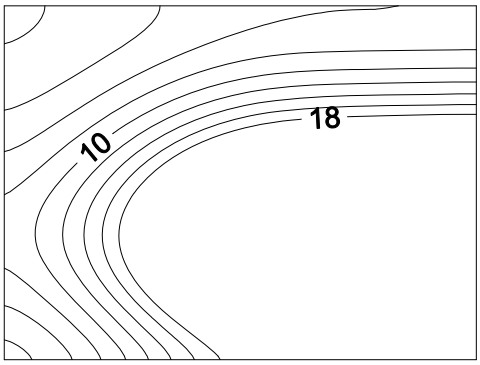
ΔT3max=18nT　ΔT4max=88nT



(g) 小波分解五阶细节（场源似深度 780m）

ΔT1max=-6nT　ΔT2max=-2nT

ΔT3max=-5nT　ΔT4max=54nT



(h) 小波分解五阶逼近(场源似深度 1061m)

图 6-8-2 垂直磁化组合球体磁场小波多尺度分解

(图中ΔT等值线的单位为 nT)

习　题

1、对磁异常进行处理和转换的目的是什么？

2、为什么要进行数据网格化？

3、磁异常换算的内容有哪些？怎样合理地选择这些转换内容？

4、试证明二度向上延拓公式的系数之和等于 1。

5、为什么垂直磁化磁异常的垂向二阶导数等于零的位置可以确定岩体的边界（厚板状体的边界）？

6、什么叫化到地磁极？为什么要进行化极处理？

7　频率域位场转换的基本原理？写出磁异常转换的各种频率响应因子，并说明其滤波作用。

8、进行重磁对应分析的意义？

9、请总结归纳划分区域异常和局部磁异常的方法，说明它们的原理及异同点。

发展趋势与本章参考文献

小波分析，分形几何等非线性科学方法在磁测资料处理中得到应用，小波分析用于航磁资料的去噪，多尺度分析方法用于分离区域磁异常与局部磁异常以及多尺度反演，突变信号分析用于断裂分析，小波压缩方法用于磁异常反演等等。高阶统计量及盲信号识别方法用于弱信号识别与提取。

参考文献

1. 谭承泽，郭绍雍等：磁法勘探教程，地质出版社，1984
2. 管志宁 地磁场与磁力勘探，地质出版社，2005
3. 罗孝宽，郭绍雍等：应用地球物理教程—重力 磁法，地质出版社，1991
4. 武汉地质学院、成都地质学院、河北地质学院、合肥工大合编：应用地球物理学—磁法教程，地质出版社，1980
5. 刘天佑 应用地球物理数据采集与处理，中国地质大学出版社，2004
6. 长春地质学院磁法教研室：磁法勘探，地质出版社，1979
7. 董焕成 磁法勘探教程，地质出版社，1993
8. 管志宁，安玉林，区域磁异常定量解释，1991，北京，地质出版社
9. 王家林、王一新、王明浩，石油重磁解释，石油工业出版社，1998.
10. 穆石敏、申宁华、孙运生，区域地球物理数据处理方法及其应用，长春，吉林科学技术出版社，1990
11. Bhattacharyya,B.K,Continuons spectrum of the total magnetic anomalies field anomaly due to a rectangular Prismatie bady,Geophysics,vol.31,97-121,1966
12. Spector,A.,航磁资料应用于火山岩复盖地区寻找斑岩铜矿，航空物探技术，1979.2
13. 杨文采，施志群，侯遵泽．离散小波变换与重力异常多重分解．地球物理学报，2001，44(4)：534～541
14. 侯遵泽，杨文采．中国重力异常的小波变换与多尺度分析．地球物理学报，1997，40(1)：85～95
15. 刘天佑,杨宇山,李媛媛等：大型积分方程降阶解法与重力资料曲面延拓，地球物理学报,Vol. 50 , No. 1，p291－297
16. 刘天佑 ,吴招才 ,詹应林：磁异常小波多尺度分解及危机矿山的深部找矿:以大冶铁矿为例，地球科学———中国地质大学学报,Vol.32.No.1，p135－141